

Matematika vizsga 2019. június

10. évfolyam, AlfaBétaGamma

A vizsga írásbeli és szóbeli részből áll.

1. rész

Írásbeli vizsga, 2019. június 14. péntek 8:00

Vegyes feladatok az év öt epochájának anyagából. Az írásbelihez saját képletgyűjteményt lehet használni.

2. rész

Szóbeli vizsga, 2019. június 14. péntek 12 órától

A tételsorból egy tétel kihúzása és ebből beszámoló egy rövid felkészülési idő után. A tételekhez kapcsolódó feladatokat is kaphatsz. Aki az ötösért megy, annak a szóbeli témakörökhöz tartozó bizonyításokat is tudnia kell. Azon tételeknél, ahol több bizonyítás is szerepel, elég csak egy választottat elmondani.

Konzultáció e-mailben (suranyisz@gmail.com).

A vizsgára való készüléshez érdemes használni az OnNote jegyzetfüzeteket, a saját füzetet. Az egyes epochákhoz plusz gyakorló feladatok kérhetők e-mail-ben.

Jó munkát!

Szabolcs

2019. június 7.

Matematika tételsor, 10. évfolyam – 2019.

1. Hatványozás, negatív kitevőre is, azonosságok
2. Határozd meg a racionális szám fogalmát. Melyik tizedes tört racionális és miért?
3. A négyzetgyök függvény grafikonjának jellemzése, elemzése példával
4. Magyarázd el a gyökjel alól kivitel, a gyökjel alá bevitel valamint a nevező gyöktelenítése eljárásokat példával!
5. Sorold fel a függvény-transzformációk geometriai jelentését példákkal!
6. A másodfokú egyenlet (gyöktényezős alak, megoldások száma, diszkrimináns)
7. A másodfokú függvény (többféle felírási módja, ábrázolása, jellemzése, tulajdonságai /pl. szélsőérték, metszéspontok, konvexitás.../)
8. Statisztika (grafikonok, középértékek, a szóródás mutatói)
9. A számtani sorozat (képlete, tulajdonságai, n-edik elem meghatározása, jelölések)
10. A számtani sorozat összege és számtani közepe
11. A mértani sorozat (képlete, tulajdonságai, n-edik elem meghatározása, jelölések)
12. A mértani sorozat összege és mértani közepe
13. A háromszög nevezetes vonalai és pontjai (tételek bizonyítással is)
14. Nevezetes négyszögek
15. A hasáb és a henger (tulajdonságok, elnevezések, felszín, térfogat)
16. A gúla és a kúp (tulajdonságok, elnevezések, felszín, térfogat)
17. A kör és részei, húrnégyszög, érintőnégyyszög, kerületi és középponti szögek, látókör
18. A derékszögű háromszög tételei (Pitagorasz-, Thalész-, magasság-, és befogótétel)
19. Szinusz, koszinusz, tangens, kotangens számolása háromszögben, számolások az emelkedési- és a depressziószöggel
20. Gráfok (alapfogalmak, összefüggések)
21. Középértékek, a számtani és mértani közép közötti összefüggés

I. Algebra

Fogalmak: algebrai kifejezések, változó, együttható, egytagú, többtagú, egynemű, egyenlet, egyenlőtlenség, másodfokú egyenlet, diszkrimináns, gyöktényező alak, *gyökös kifejezések*, értelmezési tartomány, egyenlőtlenség, lineáris egyenletrendszer, másodfokú egyenlet, másodfokúra vezető egyenletrendszer, *gyökös egyenlet*, *paraméteres egyenlet*, azonosság, ellentmondás, megoldáshalmaz, racionális, *irracionális* számok,

Összefüggések: nevezetes szorzatok, műveleti tulajdonságok, a másodfokú egyenlet megoldó képlete, *gyökös azonosságok*,

Eljárások: műveletek elvégzése algebrai kifejezésekkel (szorzás, osztás, összevonás, zárójel felbontás), szorzattá alakítás, kiegészítés teljes négyzetté, algebrai törtek egyszerűsítése, elsőfokú egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása, másodfokú egyenletek megoldása, ekvivalens átalakítások, elsőfokú egyenletek, egyenletrendszerek és egyenlőtlenségek megoldása, másodfokú egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek megoldása, $\sqrt{2}$ *irracionális szám igazolása*

II. Függvénytan

Fogalmak: függvény, lineáris függvény, meredekség, nemlineáris függvények, *konvex*, *konkáv*, zérushely, *hatvány függvény*, *páros*, *páratlan függvény*, függvény, *gyökfüggvény*, függvény jellemzése, értelmezési tartomány, érték készlet, szélsőérték

Összefüggések: a lineáris függvény hozzárendelési szabálya, *másodfokú gyökei közötti összefüggés*, *másodfokú gyökei és szélsőértékek közötti összefüggés*, *függvények és egyenletek közötti kapcsolat*,

Eljárások: lineáris és nemlineáris függvények vizsgálata, függvények ábrázolása, függvény-transzformáció, *gyökfüggvények vizsgálata*,

III. Sorozatok

Fogalmak: sorozat, számtani sorozat, differencia, mértani sorozat, hányados, monoton és szigorúan monoton sorozatok, korlátosság,

Összefüggések: sorozatokhoz kapcsolódó jelölések, számtani sorozat n-edik eleme és első n elemének összege, számtani közép, mértani sorozat n-edik eleme és első n elemének összege, mértani közép,

Eljárások: sorozat elemeinek meghatározása képlettel és rekurzívan megadott sorozat esetén, elemek és összegek számítása számtani és mértani sorozat esetén, szöveges feladatok, kamatos kamattal kapcsolatos feladatok megoldása,

IV. Geometria

Fogalmak: Háromszögek (betűzés, jelölések), oldalfelező merőleges és a köréírt kör, szögfelező és a beírt kör, magasságvonal és pont, súlyvonal és pont, középvonal. Derékszögű háromszögben a betűzések, elnevezések. Sin, cos, tg, ctg definíciója. Nevezetes szögek szögfüggvényei. Nevezetes négyszögek fajtái meghatározásuk,

tulajdonságaik, kerület és terület (négyzet, téglalap, deltoid, paralelogramma, rombusz, trapéz, húrtrapéz, húrnégyszög, érintőnégyyszög). Sokszögek, szabályos sokszögek. Kör és részei, középponti és kerületi szög, összefüggésük, a kör kerülete és területe, körív és körcikk, ívmérték. Tételek (pont, egyenes, sík, egymáshoz képesti helyzetük a térben) Testek (testátló, lapátló, alap, magasság, alkotó, térfogat, felszín, hasáb, kocka, henger, gúla, kúp)

Egybevágóság, hasonlóság fogalma. Geometriai transzformációk: tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, eltolás, forgatás, középpontos hasonlóság

Vektorok, vektorműveletek.

Összefüggések: háromszögek csoportosítása oldalak, ill. szögek szerint, összefüggés (tételek) az általános háromszög oldalai, szögei, oldalai és szögei között, köréírható, beírható körre vonatkozó tétel, súlypontra, középvonalra vonatkozó tétel, derékszögű háromszögre vonatkozó tételek: Pitagorasz, Thalesz, befogó és magasság tétel. Húr és érintő négyszögekre vonatkozó tétel. A sokszögek átlóira és szögeire vonatkozó összefüggések. Egybevágó és hasonló síkidomok oldali és szögei közötti összefüggés. Trigonometrikus szögfüggvényekre vonatkozó összefüggések.

Eljárások: Háromszög nevezetes vonalainak, pontjainak, köreinek szerkesztése. Thalesz kör szerkesztése. Háromszögek, négyszögek, kör és részeinek szerkesztése, kerület terület számolása. Testek felszíne, térfogata, magassága, test és lapátló számolása Középpontosan hasonló síkidomok szerkesztése. Hasonlóságok számolása. Trigonometrikus szögfüggvények alkalmazása. Vektorműveletek szerkesztése, koordinátarendszerben számolása.

V. Kombinatorika, valószínűség-számítás, statisztika

Fogalmak: permutáció, variáció, kombináció, kombinatorikus illetve geometrikus valószínűség, statisztika, gyakoriság, relatív gyakoriság, diagramok, módusz, medián, átlag, terjedelem, átlagos abszolút eltérés, szórás, esemény, elemi esemény, összetett esemény, klasszikus valószínűségi mező, biztos esemény, lehetetlen esemény, komplementer esemény, középértékek (átlag, módusz, medián, számtani közép, mértani közép, négyzetes közép, harmónikus közép)

Összefüggések: hányféleképpen, statisztikai mutatók, középértékek számítása, a valószínűség kombinatorikus számítása, a számtani és mértani közép közötti összefüggés

Eljárások: sorba rendezések, kiválasztások, adathalmazból táblázat és grafikon készítése, statisztikai mutatók, középértékek értelmezése, szöveges feladatokban történő alkalmazása, összetett események valószínűségének kiszámítása kombinatorikus modell alapján, szélsőérték kiszámítása a középértékek segítségével

VI. Gráfok

Fogalmak: gráf, csúcs, él, fokszám, hurokél, párhuzamos él, egyszerű gráf, összefüggő gráf, fagráf

Összefüggések: Élek száma és foksámok összege közötti összefüggés, gráf lerajzolása egy vonallal

Eljárások: gráf lerajzolása szöveg alapján

Gyakorló a vizsgára

1. Bontsd fel a zárójeleket a nevezetes azonosságok alkalmazásával!

a) $(2x + 3)^2 =$

b) $(x - 3y)^2 =$

c) $(5 - 3a)(5 + 3a) =$

d) $*** (y + 5)^3 =$

2. Írd fel szorzat alakban a kifejezéseket a nevezetes azonosságok alkalmazásával!

a) $4b^2 - 4ab + a^2 =$

b) $36x^2 - 25y^2 =$

c) $49 + 28c + 4c^2 =$

d) $*** x^3 - 6x^2 + 12x - 8 =$

3. Írd fel teljes négyzet segítségével a kifejezéseket!

a) $x^2 + 2x - 1 = (\quad)^2 \pm \dots\dots$

b) $x^2 - 4x + 8 =$

c) $4x^2 + 12x =$

d) $*** - 2x^2 + 6x - 10 =$

4. Egyszerűsítsd a törtet! (Először bonts szorzattá, ahol lehet!)

a) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} =$

c) $\frac{4x^2 + 12x}{x^2 - 9} =$

b) $\frac{2a - 2b}{a^2 - 2ab + b^2} =$

d) $\frac{3y - 9}{6 - 2y} =$

5. Végezd el a műveleteket! (Egyszerűsíts, ahol lehet! Csak a legegyszerűbb alakot fogadom el végeredményként.)

a) $\frac{2x - 5}{7} - \frac{x + 2}{21} + \frac{5 - 3x}{3} =$

b) $\frac{a^5 y^3}{10x^2 b^5} \cdot \frac{25x^3 b^2}{2y^3 a^8} =$

c) $*** \frac{z^2 + za}{5z^2 - 5a^2} : \frac{z^2 - za}{3z^3 + 3a^3} =$

6. Oldd meg az egyenletet!

a) $x^2 - (x + 2)(x - 1) = 8 + x$

b) $7 - \frac{5 - x}{2} = \frac{4 - x}{3} - \frac{x + 5}{6}$

7. Bontsd fel a zárójeleket a nevezetes azonosságok alkalmazásával!

a) $(x - 5)^2 =$

b) $(2a + b)^2 =$

c) $(3 - 2y)(3 + 2y) =$

d) $*** (y + 5)^3 =$

8. Írd fel szorzat alakban a kifejezéseket a nevezetes azonosságok alkalmazásával!

a) $9x^2 - 6xy + y^2 =$

b) $4x^2 - 25y^2 =$

c) $1 + 8c + 16c^2 =$

d) $*** x^3 - 6x^2 + 12x - 8 =$

9. Írd fel teljes négyzet segítségével a kifejezéseket!

a) $a^2 + 6a + 2 = (\quad)^2 \pm \dots\dots$

b) $y^2 - 10y - 1 =$

c) $9x^2 + 12x =$

d) $*** - 2x^2 + 6x - 10 =$

10. Egyszerűsítsd a törtet! (Először bonts szorzattá, ahol lehet!)

a) $\frac{a^2 - 1}{a^2 + 2a + 1} =$

c) $\frac{x^2 - 4}{6x^2 - 12x} =$

b) $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{2x - 2y} =$

d) $\frac{2 - 6b}{9b - 3} =$

11. Végezd el a műveleteket! (Egyszerűsíts, ahol lehet! Csak a legegyszerűbb alakot fogadom el végeredményként.)

a) $\frac{2a-3}{3} - \frac{a+2}{6} + \frac{6-3a}{4} =$

b) $\frac{2x^5y^3}{6a^2b^5} \cdot \frac{9a^3b^2}{y^3x^8} =$

12. Oldd meg az egyenleteket! (Ne feledd az ellenőrzést!)

a) $\frac{3x+2}{x} - \frac{x+2}{2x} = x+1$

b) $\frac{3x-1}{x+3} - \frac{3-x}{x-3} = 2$

13. Két szám összege 20. Melyik ez a két szám, ha szorzatuk 36?

14. A spanyol labdarúgó-bajnokság őszi idényében, amikor minden csapat egyszer játszott minden más csapattal, összesen 190 mérkőzésre került sor. Hány csapat vett részt a bajnokságban?

15. Írj fel egy olyan egyenletet, melynek gyökei 2 és (-9)!

16. Tegyel kikötést, és egyszerűsítsd a törtet! (Előbb szorzattá kell bontani!)

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} =$$

17. *** Az $ax^2 + 7x + 12 = 0$ egyenlet egyik gyöke $x_1 = -3$. Határozd meg a másik gyököt és a diszkriminánst! Írd fel az egyenlet gyöktényező alakját!

18. Ábrázold a lineáris függvényt, majd írd fel a hozzárendelési szabályt is!

a) Átmegy a (0; 2) ponton, és az x tengely pozitív irányában 1 egységet haladva 4 egységgel nő.

b) Átmegy a (0; 2) ponton, és az x tengely pozitív irányában 2 egységet haladva 10 egységgel csökken.

19. Ábrázold és jellemezd a függvényeket (a táblázat szerint)!

a) $a: x \mapsto (x-1)^2 - 4$

b) $b: x \mapsto 2|x+2| - 3$

c) *** $c: x \mapsto -\frac{1}{2}\sqrt{x-2} + 1$

d) *** $d: x \mapsto -\frac{2}{x+2} - 2$

	ÉT	ÉK	Zh	y-tg-m	Min	Max	Növekvő	Csökkenő
a								
b								
c								
d								

20. Oldd meg az egyenleteket! (Ne feledd az ellenőrzést!)

a) $\frac{3x-2}{5} - \frac{4-3x}{x} = x$

b) $\frac{x+1}{x-2} - \frac{2x-1}{x+2} = 3$

21. Két szám különbsége 12. Melyik ez a két szám, ha szorzatuk 45?

22. A spanyol labdarúgó-bajnokság őszi idényében, amikor minden csapat egyszer játszott minden más csapattal, összesen 153 mérkőzésre került sor. Hány csapat vett részt a bajnokságban?

23. Írj fel egy olyan egyenletet, melynek gyökei (-8) és 1!

24. Tegyéél kikötést, és egyszerűsítsd a törtet! (Előbb szorzattá kell bontani!)

$$\frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 8x + 15} =$$

25. *** Az $ax^2 + 7x + 12 = 0$ egyenlet egyik gyöke $x_1 = -3$. Határozd meg a másik gyököt és a diszkriminánst! Írd fel az egyenlet gyöktényező alakját!

26. Ábrázold a lineáris függvényt, majd írd fel a hozzárendelési szabályt is!

a) Átmegy a (0; 1) ponton, és az x tengely pozitív irányában 1 egységet haladva 2 egységgel csökken.

b) Átmegy a (0; 1) ponton, és az x tengely pozitív irányában 2 egységet haladva 6 egységgel nő.

27. Ábrázold és jellemezd a függvényeket (a táblázat szerint)!

e) $a : x \mapsto |x-1| - 4$

f) $b : x \mapsto -(x+2)^2 + 1$

g) *** $c : x \mapsto -\frac{1}{2}\sqrt{x-2} + 1$

h) *** $d : x \mapsto -\frac{2}{x+2} - 2$

	ÉT	ÉK	Zh	y-tg-m	Min	Max	Növekvő	Csökkenő
a								
b								
c								
d								

28. Ábrázold és jellemezd a függvényeket! (A zérushelyeket pontosan add meg!)

a) $y = x^2 + 8x + 14$

b) $x \mapsto -(x-2)^2 + 4$

c) *** $f(x) = -2x^2 - 8x - 4$

d) *** $f(x) = 2x^2 - 12x + 16$

29. Oldd meg az egyenleteket! Ne feledkezz meg a kikötésről, ahol szükséges!

a) $3x^2 + 5x - 8 = 0$

b) $10(x-2) + 19 = (5x-1)(5x+1)$

c) $\frac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 7x + 12} = 2$

d) $\frac{3x-7}{x+5} = \frac{x-3}{x+2}$

e) *** $\frac{x}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} = \frac{4}{4x^2-1}$

f) *** $\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} + \frac{x-4}{x^2+2x} = 0$

30. Hány megoldása van az egyenleteknek? A választ az egyenletek megoldása nélkül, de indoklással add meg!

a) $3x^2 + 5x + 20 = 0$

b) $x^2 - 8x = 6x - 4x^2 + 9$

c) $(x-3)\left(x-\frac{3}{5}\right) = 0$

d) $-3x^2 - 6x + 20 = 2x - 3x^2 - 12$

31. Ábrázold az egyenlőtlenségek megoldását számegegyenesen!

a) $x^2 + 6x + 8 \leq 0$

b) $-x^2 + 10x - 24 < 0$

32. Szöveges feladatok

a) 630 facsemetét két négyzet alakú parcellába akartak ültetni. Az egyik négyzet oldala mentén 5 fával kevesebbet ültettek, mint a másik mentén, és így 5 csemete megmaradt. Hány fát ültettek egy-egy parcellába?

b) Egy téglalap egyik oldalát 4 m-rel megrövidítjük, másik oldalát pedig 3 m-rel meghosszabbítjuk, akkor olyan négyzete kapunk, amelynek terület 3m^2 -rel nagyobb, mint az eredeti téglalapé volt. Mekkora a téglalap oldalai?

c) Van-e olyan konvex sokszög, amelynek 35 átlója van?

d) *** Egy kikötőből egyszerre indul két hajó: az egyik északnak, a másik keletnek. Két óra múlva 60 km-re lesznek egymástól. Állapítsuk meg mindkét hajó sebességét, ha az egyik óránként 6 km-rel többet halad, mint a másik!

33. *** Állapítsd meg, hogy igaz-e (I/H) a másodfokú függvényekre! A válaszodhoz indoklasként készíts vázlatos rajzokat! (Indoklás nélkül nem ér pontot a válasz.)

a) Ha a függvény diszkriminánsa nulla, akkor a szélsőértéke és az x tengellyel való metszéspontja megegyezik.	
b) Ha a függvény grafikonja az x és az y tengelyt is negatív értékben metszi, akkor konvex.	
c) Ha a függvény diszkriminánsa negatív, akkor a függvény értékkészlete tartalmazza a nullát.	
d) Ha a konvex függvény az y tengelyt negatív értékben metszi, akkor a diszkriminánsa pozitív.	
e) Ha a függvény x és y tengellyel való metszéspontjai pozitívak, akkor $a > 0$ és $c > 0$	
f) Ha létezik metszéspontja az x tengellyel (x_1 és x_2), akkor a szélsőérték helye $x_1 + x_2$	

- Döntsd el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis!
 - A racionális számok halmazát \mathbf{R} betűvel jelöljük.
 - Az irracionális számok tizedes tört alakja végtelen és nem szakaszos.
 - Minden racionális szám benne van a valós számok halmazában.
 - A nulla se nem pozitív se nem negatív szám.
 - A $\sqrt{a^2}$ két értéket vehet fel: a -t és $(-a)$ -t.
- (8 p) Készíts halmazábrát a számhalmazokról, címkézd meg az egyes részeket a megfelelő betűjelekkel, és helyezd el benne a következő számokat:

$$-\frac{3}{4}; \quad \pi; \quad 2,010010001\dots; \quad \frac{6}{2}; \quad -\frac{21}{7};$$

- Egy négyzet alapú egyenes hasáb alakú vázába 1,21 liter víz fér. Mekkora az alapéle, ha magassága 10 cm?
- Egy szabályos kör alakú virágágyás területe 28,26 m². Mekkora a kör sugara?
- Egy téglalap alaprajzú szobába 200 m³ levegő fér. A szoba magassága 2,5 méter, szélessége a hosszának 80%-a. Mekkora a szoba két oldala?
- Számológép használata nélkül add meg a pontos értékét! (Az átalakításokat is írd le!)

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} =$

b) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} =$

c) $(\sqrt{5} - \sqrt{20}) \cdot \sqrt{5} =$

- *** Bizonyítsd be, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális!
- Végezd el a műveletet! (Kérem a lépéseket is, számológéppel nem ér!)

a) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} =$

b) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} =$

c) $(\sqrt{7} - 2) \cdot (\sqrt{7} - 2) =$

d) $\sqrt{2}(\sqrt{32} - \sqrt{8}) =$

e) $\sqrt{12} + \sqrt{108} + \sqrt{147} =$

f) *** $(\sqrt{27} + \sqrt{2} - \sqrt{12}) \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{3} - \sqrt{18}) =$

- Melyik a nagyobb? (Természetesen indoklás, átalakítások kellenek.)

a) $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{2}}$ vagy $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}$

b) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{12}} \cdot \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{2}}$ vagy $\frac{(\sqrt{2})^3}{\sqrt{15}} \cdot \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}}$

- Gyöktelenítsd a törtek nevezőjét!

a) $\frac{6}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{10}{3\sqrt{5}}$

c) $\frac{8}{2 + \sqrt{3}}$

d) $\frac{21}{5 - 3\sqrt{2}}$

- Oldd meg az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{2x - 5} = 9$

b) $x = \sqrt{5x + 1} - 1$

c) $\sqrt{2x - 5} + \sqrt{5 - 2x} = 0$

d) $-7 = \sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 8}$

e) $\sqrt{5x + 1} - \sqrt{7x + 1} = 0$

12. Grafikusan oldd meg az egyenletet!

$$\sqrt{x+2} = (x+3)^2 - 3$$

13. Oldd meg az $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ egyenletet!

14. Egy téglalap alaprajzú szobába 36 m^3 levegő fér. A szoba magassága 3 méter, szélessége a hosszának 75%-a. Mekkora a szoba két oldala?

15. *** Számítsd ki a pontos értékét!

$$\left(\sqrt{11-\sqrt{21}} + \sqrt{11+\sqrt{21}}\right)^2 =$$

16. *** Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-2} = 1-x$$

17. *** Végezd el a műveletet!

$$\left(\frac{6}{\sqrt{5}+2} + \frac{2}{\sqrt{20}-4}\right) \cdot (10+7\sqrt{5}) =$$

18. *** Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x^2-16} = 9-1 \Rightarrow$$

19. A gyökvonás azonosságainak alkalmazásával alakítsd át a kifejezéseket, és rendezd növekvő sorrendbe. (Számológéppel kiszámolt értékekkel nem érvényes!) (10 pont)

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$ b) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ c) $5\sqrt{3}$ d) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ e) $\frac{1}{\sqrt{3}+1}$

20. Oldd meg a $2x^2 + 3x = 21 + 14x$ egyenletet!

21. Egy téglalap alakú ágytakaró egyik oldala 40 cm-rel hosszabb, mint a másik. Készítésekor $3,96 \text{ m}^2$ anyagot használtak fel. Mekkora az oldalai?

22. Oldd meg az $x^4 - 7x^2 = 54 - 4x^2$ egyenletet!)

23. Oldd meg az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{3x+7} = 5$

b) $\sqrt{2x+9} - x = 3$

24. Oldd meg a négyzetgyökös egyenleteket!

a) $\sqrt{3x-4} = 5$

b) $\sqrt{5-x} + \sqrt{x-5} = 0$

c) $\sqrt{x-1} \sqrt{2x-5} = 0$

d) $\sqrt{x-1} - 2x = 0$

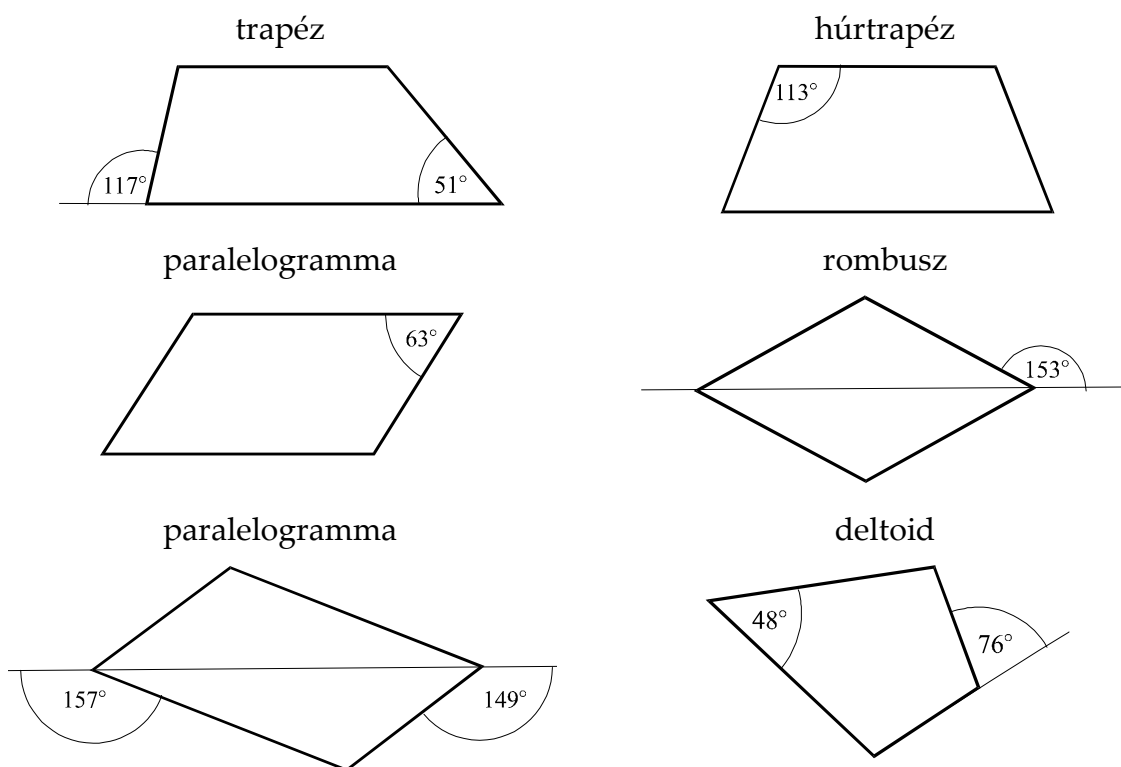
e) $\sqrt{2x+1} = x+1$

25. Ábrázold az $f(x) = x^2 + 6x + 5$ függvény grafikonját, és jellemzed a függvényt! (ÉT, ÉK, menete, zérushely, y tengellyel való metszéspont, szélső értékek és ezek helye, konvexitás)
26. Ábrázold az $f(x) = 3\sqrt{x+2}$ függvény grafikonját, és jellemzed a függvényt! (ÉT, ÉK, menete, zérushely, y tengellyel való metszéspont, szélső értékek és ezek helye, konvexitás)
27. Oldd meg az $\frac{x-1}{x-5} = \frac{2}{x^2-2x-15} + \frac{2x+3}{x+3}$ egyenletet a pozitív számok halmazán!
28. *** Az $x^2 - 2px + p(1+p) = 0$ egyenletnek a p paraméter mely értékeire lesz egyetlen valós gyöke?
29. *** Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!
 $\sqrt{x} + \sqrt{x-2} = 1-x$
30. *** Bontsd szorzattá a $x^4 + x^2 + 1$ kifejezést!

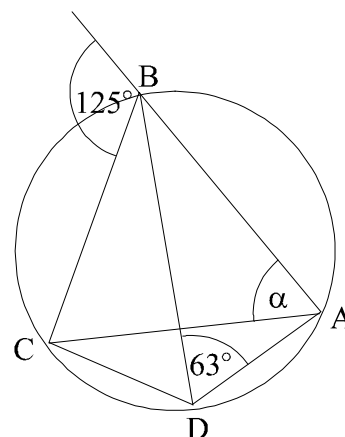
1. a) Sorold fel az $x \mapsto (x+1)^2$, $x \in \mathbb{N}^+$ sorozat első 6 elemét!
b) Add meg az n-edik elemet képlettel is!
2. Egy sorozat első eleme -3, és $a_{n+1} = a_n \cdot 2$. Számítsd ki az első 5 elemét!
3. Egy sorozatot az $n \mapsto -|n-3|$, $n \in \mathbb{N}^+$ szabállyal adtuk meg.
 - a) Ábrázold koordináta-rendszerben az első 6 elemét!
 - b) Igaz-e, hogy (indoklást kérek!)
 - $a_{16} = -13$
 - $a_{34} = 31$
 - A sorozat elemei egész számok.
 - A sorozat minden eleme negatív szám.
 - A sorozat tagja a -67.
4. Egy sorozat első eleme 8, és a többi elemét úgy lehet kiszámolni, hogy az előző kétszereséhez hármat hozzáadunk. Írd le ezt a tanult jelölésekkel!
5. Egy számtani sorozat első eleme 5, a differencia (-2,5).
 - a) Írd fel az adatokat a tanult jelölésekkel!
 - b) Számítsd ki a sorozat 7. elemét!
 - c) Számítsd ki az első hét elem összegét!
6. Egy számtani sorozat ötödik eleme 21, a differencia 0,5.
 - a) Írd fel az adatokat a tanult jelölésekkel!
 - b) Számítsd ki a sorozat 1. elemét!
 - c) Számítsd ki az első öt elem összegét!
7. Egy számtani sorozat első eleme 57, ötödik eleme 77.
 - a) Írd fel az adatokat a tanult jelölésekkel!
 - b) Számítsd ki a sorozat differenciáját!
 - c) Számítsd ki az első tíz elem összegét!
8. Számítsd ki a 44 és 132 közé eső páros számok összegét! (Legyen benne a 44 és a 132 is!)
9. Iktass a 96 és a 60 közé 5 elemet úgy, hogy számtani sorozatot adjanak!
10. Egy számtani sorozat első eleme 7, differenciája $-\frac{5}{3}$. Számítsd ki az első 19 elem összegét!
11. *** Egy számtani sorozatban a második és a nyolcadik elem összege 28, a negyedik és az ötödik összege 25. Mekkora a differencia és az első elem?
12. *** A 4-es metró alagútja a Gellért téri és a Fővám téri állomása közötti 420 méter. A fűrópajzs az első napon 15 métert halad előre, és minden további napon az előzőnél 0,5 m-rel többet. Hány nap alatt lesz készen az alagút?
13. Számítsd ki a rekurzívan megadott sorozat első 5 tagját!
 - a) $a_1 = 0,5$ és $a_{n+1} = a_n - 3$
 - b) $b_1 = -2$ és $b_{n+1} = 2 \cdot b_n$
 - c) $c_1 = 3$ és $c_{n+1} = 2 \cdot c_n - 1$
 - d) Van-e az előzőek között számtani vagy mértani sorozat? Ha van, akkor add meg a sorozat jellemzőit! (első elem, és a differencia vagy a kvóciens)
14. Egy számtani sorozatban $a_4 = -2$ $a_5 = -4,5$. Határozd meg az a_9 és az S_{12} értékét!
15. Egy számtani sorozatban $a_3 = 17$ $a_7 = 37$. Mekkora az első tíz elem összege?
16. Mennyi az első 100 pozitív páratlan szám összege?
17. Bálint arról álmodozik, hogy az epochális órák napról napra rövidebbek. A kezdeti 80 perc minden nap 2 perccel csökken.
 - a) Hányadik iskolai napon éri el az epocha hossza a Bálint számára ideális 10 percet?
 - b) Hány percet kellett (volna) addig összesen tanulással töltenie az epochákon szegény Bálintnak?
18. Iktass a 3 és 27 számok közé 7 elemet úgy, hogy a két megadott számmal együtt számtani sorozatot alkossanak!

19. Egy derékszögű háromszög három oldala egy számtani sorozat három egymást követő eleme. Mekkora a háromszög oldalai, ha a területe 300 cm^2 ?
20. *** Egy számtani sorozat első három tagjának összege 45-tel kisebb, mint a következő három tag összege. Az első hat tag összege 85. Melyik ez a sorozat?
21. Egy mértani sorozat első és harmadik tagjának szorzata 36.
- Mi lehet a második tag?
 - És a kvóciens?
22. Egy mértani sorozat 7-edik tagja 6, a 9-edik tagja 96. Mi az 5. tag, és mennyi az első 5 tag összege?
23. Julcsi zsebpénze januárban 2000 Ft volt. Minden hónapban 5%-kal megemelték az előző havi juttatását.
- Mennyi pénzt kapott januárban?
 - Mennyit kapott az év folyamán összesen?
24. Egy 30 000 Ft-os áru árát folyamatosan emelik. Az első évben 3%-kal, a következőben 25%-kal, a harmadik évben 27%-kal, a negyedik évben 12%-kal.
- Mennyi lesz a ruha ára a negyedik áremelés után?
 - Mekkora az éves átlagos áremelés?
25. *** Egy háromszög oldalhosszúságai egy számtani sorozat egymást követő tagjai. A háromszög kerülete 27 cm, legrövidebb és leghosszabb oldalának a szorzata 65 cm^2 . Mekkora a háromszög oldalai?
26. Egy osztályban a tanév végén az alábbi matematikajegyek születtek:
4, 2, 4, 5, 3, 3, 5, 2, 4, 4, 3, 4, 4, 3, 2, 5, 4, 4, 3, 3, 4, 3, 5, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 4.
- Készíts az adatokból gyakorisági és relatív gyakorisági táblázatot!
 - Ábrázold a gyakoriságot oszlopdiagramon!
 - Számítsd ki az átlagot!
 - Határozd meg a móduszt és a mediánt!
27. Egy családban 5 kereső van: 3 férfi és 2 nő. A férfiak havi keresete 155 000 Ft, a nőké 125 000 Ft.
- Mennyi a keresők havi átlagjövedelme?
 - Számítsd ki az adatok szórását!
 - Mennyi a családban az egy főre jutó havi jövedelem, ha a keresőkön kívül még 3 gyerek tartozik a családhoz?
28. Mennyi a valószínűsége annak, hogy két dobókockával dobva
- az összeg 6 lesz?
 - az összeg legalább 10 lesz?
29. Termtud epochán totót tölt ki az Irka kupac. Minden kérdésre három lehetséges válasz közül kell a helyes megoldást kiválasztani, a dolgozat 4 kérdésből áll.
- Mennyi a valószínűsége, hogy telitalálatos lesz Marci dolgozata, ha nem készült, csak tippel. (Indokolj!)
 - És annak, hogy legfeljebb két hibája lesz?

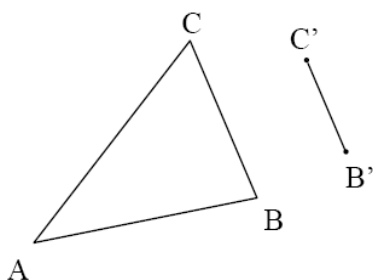
1. Egy háromszög egyik szöge 70° , a másik két szöghöz tartozó külső szögek aránya $2 : 3$. Számítsd ki a hiányzó szögeket!
2. Egy háromszög szögfelezője a szemközti oldallal 82° -os, egy másik szögfelezővel 52° -os szöget zár be. Mekkora a háromszög szögei?
3. Egy háromszög egyik csúcsánál 46° -os, másik csúcsánál 60° -os szög található. Mekkora szöget zár be egymással a harmadik csúcsból kiinduló szögfelező és magasságvonal?
4. Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a = 4,5$ cm, $m_a = 4,7$ cm, $b = 5,2$ cm!
 - a. Szerkeszd meg a háromszöget! (Vázlat, menet, szerkesztés, diszkusszió)
 - b. Szerkeszd meg a fenti háromszög köré írt körét!
5. Egy 2,6 m-es létrát ferdén a falnak támasztottunk. Számítsd ki az aljának és a tetejének a távolságát attól a ponttól, ahol a fal és a padló találkozik, ha tudjuk, hogy ennek a két távolságnak az aránya $12 : 5$!
6. Szerkessz háromszöget, ha két oldala 6 cm és 7,5 cm, és a harmadikhoz tartozó súlyvonal 5,5 cm! (Vázlat, menet, szerkesztés, diszkusszió)
7. Határozd meg a 10 cm oldalú szabályos háromszög beírható körének sugarát!
8. Számítsd ki a négyszögek belső szögeit!



9. Számítsd ki az ábrán látható α szöget! A számolás gondolatmenetét is írd le!



10. Szerkessz háromszöget, melynek oldalai 5 cm és 5,4 cm és a hosszabbikhoz tartozó magasság 4,5 cm! Szerkeszd meg a háromszög köré írt körét is!
11. Egy húrtrapéz két alapja 21cm és 11cm, szárjai 13cm hosszúságúak. Számítsd ki a területét, a területét és az átlójának a hosszát!
12. Számítsd ki a négyzet alapú egyenes gúla felszínét és térfogatát, ha alapéle 12 dm és magassága 8 dm! Rajzold le a testet és hálóját is!
13. Egy henger alakú bögre alapkörének átmérője 8 cm, magassága 12 cm.
 - a) Hány cm^2 -re való máz kell, hogy 15 ilyen bögrét befessünk, ha kívül és belül is mázazni szeretnénk, és a vastagsága valamint a füle miatt 10%-ot kell rászámolni?
 - b) Hány dl tea fér egy ilyen bögrébe?
14. Egy háromszög oldalainak hossza 7 cm, 8 cm és 12 cm. Egy hozzá hasonló háromszög leghosszabb oldala 20 cm. Milyen hosszú a háromszög hiányzó két oldala? Mekkora a két háromszög területének, illetve területének aránya?
15. Az ABC háromszögből középpontos hasonlósággal kapjuk az $A'B'C'$ háromszöget, melynek $B'C'$ oldalát megadtuk. Szerkeszd meg a háromszög A' csúcsát! Indokold is a szerkesztésedet!



16. Egy épület árnyéka 45 méter hosszú. Milyen magas az épület, ha ugyanekkor egy 160 cm-es bot árnyéka 120 cm? A válaszod indokold, és készíts ábrát a megoldáshoz!
17. Egy derékszögű háromszög magassága az átfogót 6 cm és 8 cm hosszúságú részekre bontja. Milyen hosszúak a háromszög oldalai? Válaszod indokold!

18. Egy trapéz két alapja $AB=24$ cm és $CD=15$ cm. Az átlók metszéspontja P Mekkora a CP távolság, ha $AP=6$ cm?
19. Évi a farsangra kúp alakú süveget készített magának. Egy 40 cm sugarú körből vág ki egy 90° -os középponti szögű körcikket.
- a) Hány m^2 kartonra van szüksége?
- b) Kistestvére a farsang után homokkal töltötte meg a süveget. Hány kg homok fért bele, ha színültig telt, és a homok sűrűsége $1,58 \frac{g}{cm^3}$?

1. Egészítsd ki a definíciókat!

a) $\sin \alpha =$ _____ b) $\operatorname{ctg} \alpha =$ _____

2. Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge 60° -os. Számológép segítségével számold ki, és a tanult jelölések használatával írd le ...

- a) a megadott szög melletti befogó és az átfogó arányát!
- b) a megadott szöggel szemközti befogó és a megadott szög melletti befogó arányát!
- c) a megadott szöggel szemközti befogó és az átfogó arányát!
- d) a megadott szög melletti befogó és a megadott szöggel szemközti befogó arányát!

3. Egy derékszögű háromszögben a szög melletti befogó és az átfogó aránya 0,5741. Írd le ezt a tanult jelöléssel, és számítsd ki a háromszög szögeit!

4. Egy derékszögű háromszögben a szöggel szemközti befogó és szög melletti befogó aránya 1,7. Írd le ezt a tanult jelöléssel, és számítsd ki a háromszög szögeit!

5. Hogyan számíthatjuk ki egy hegyesszög tangensét? Szöveggel fogalmazd meg, és illusztráld ábrával is!

6. Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge 36° -os, az átfogója 6,2 cm hosszú. Készíts ábrát, és számold ki a háromszög hiányzó adatait!

7. Számológép segítségével határozd meg a következő szögfüggvények értékét!

a) $\cos 46^\circ =$ b) $\sin \frac{\pi}{10} =$ c) $\operatorname{ctg} 26,5^\circ =$

8. Mekkora szöget zár be a talajjal egy 2 méter magasra felvivő 5 méter hosszúságú rámpa?

9. Egy közvetlenül a folyó partján álló épület 20 m magasan levő ablakából a folyó szélességét 80° -os szög alatt látjuk. Milyen széles a folyó?

10. Egy húrtrapéz alakú telek rövidebbik alapja 60 méter, szárai 48 métereseek, és 136° -os szöget zárnak be a megadott alappal.

- a) Hány méter kerítés szükséges a telek bekerítésére, ha az illesztések miatt 10%-ot rá kell számolni?
- b) Mennyibe kerül a telek teljes befüvesítése, ha 1 kg fűmag ára 700 Ft, és ez 40 m^2 -re elegendő

11. Egy egyenes körkúp magassága 23 cm, és az alkotói 52° -os szöget zárnak be az alapsíkkal.

- a) Számítsd ki az alapkörének a sugarát és az alkotó hosszát!
- b) Mekkora a kúp térfogata?
- c) Számítsd ki a kúp felszínét!
- d) *** Mekkora a palástot alkotó körcikk középponti szöge?

12. Egy 12 cm sugarú körbe 88° -os középponti szöget rajzolunk.

- a) Mekkora húr és mekkora körív tartozik ehhez a szöghöz?
- b) Számítsd ki a körcikk területét!

c) Mekkora a területe a két sugár és a húr által határolt háromszögnek?

13. (2-2p) Számítsd ki a következő kifejezések pontos értékét számológép használata nélkül (az átalakítás leírása szükséges)!

a) $\sin 25^\circ \cdot \cos 65^\circ + \sin 65^\circ \cdot \cos 25^\circ$

b) $1 - \cos^2 32^\circ - 2 \cdot \sin 32^\circ \cdot \cos 58^\circ + \cos^2 58^\circ$

c) *** $(\sin 10^\circ + \cos 10^\circ)^2 + (\sin 10^\circ - \cos 10^\circ)^2$

14. *** Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszögének a szinusza $\frac{5}{13}$, a területe 1,2 m². (A válasz csak részletes indoklással, levezetéssel ér pontot.)

a) Mekkora ennek a hegyesszögnek a koszinusza?

b) Mekkora a háromszög oldalai?

Közepek, logika, gráfok, halmazok

1. Töltsd ki a táblázat hiányzó részeit! (A: számtani közép, G: mértani közép.)

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)
<i>a</i>	100	15			12	120				
<i>b</i>	125	20	14	208						
<i>A</i>			8	168			20	7,5	1	25
<i>G</i>					15	100	16	6	0,6	15

2. Egy busz a menetidejének első harmadát 60 km/h, fennmaradó részét 90 km/h sebességgel tette meg. Mekkora volt az átlagsebessége?

3. Egy derékszögű háromszögben az átfogót a hozzá tartozó magasság 3 cm és 5 cm nagyságú részekre osztja. Mekkora a háromszög területe és kerülete?


4. Egy derékszögű háromszögben a befogók aránya 1,5. Az átfogóhoz tartozó magasság 10 cm. Mekkora részekre osztja az átfogót a hozzá tartozó magasság?

5. Mekkora a derékszögű háromszög köré írható kör sugara, ha a befogók aránya 3 : 4, és az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót két olyan szeletre bontja, amelyek különbsége 4 cm?

6. 120 méter hosszú kerítéssel legfeljebb mekkora területű téglalap alakú telket lehet körülkeríteni?

7. Legalább mennyi kerítésre van szükség egy 120 m²-es, téglalap alakú telek körbekerítéséhez?

8. Mekkora a maximális területe annak a téglalaprak, amelynek kerülete 40 cm? Mekkora ekkor a téglalap oldalai?

10. Egy gráfban 4 csúcs van. Az egyes csúcsokból 3; 2; 2; 1 él indul. Hány éle van a gráfnak?
11. Egy sakkverseny döntőjébe 5 versenyző jutott be. Közülük 1 versenyző mindegyik társát ismeri, a többiek pedig egyenként 2-2 személyt ismernek a döntő résztvevői közül. Szemléltesse rajzzal (gráf alkalmazásával) az ismeretségeket, ha az ismeretségek kölcsönösek!
12. Rajzoljon egy olyan öt csúcspontú gráfot, amelyben a pontok fokszáma 4; 3; 3; 2 és 2.
13. Rajzolj egy olyan 5 csúcsú gráfot, melyben a csúcsok fokszámának összege 12.
14. A városi középiskolás egyéni teniszbajnokság egyik csoportjába hatan kerültek: András, Béla, Csaba, Dani, Ede és Feri. A versenykiírás szerint bármely két fiúnak pontosan egyszer kell játszania egymással. Eddig András már játszott Bélával, Danival és Ferivel. Béla játszott már Edével is. Csaba csak Edével játszott, Dani pedig Andrásen kívül csak Ferivel. Ede és Feri egyaránt két mérkőzésen van túl.
- Szemléltesd gráffal a lejátszott mérkőzéseket!
 - Hány mérkőzés van még hátra?
 - Hány olyan sorrend alakulhat ki, ahol a hat versenyző közül Dani az első két hely valamelyikén végez?
15. Az ábrán látható térképvázlat öt falu elhelyezkedését mutatja. Az öt falu között négy olyan út megépítésére van lehetőség, amelyek mindegyike pontosan két falut köt össze. Ezekből két út már elkészült. Rajzolja be a további két út egy lehetséges elhelyezkedését úgy, hogy bármelyik faluból bármelyik faluba eljuthassunk a megépült négy úton!
- 
16. Egy négytagú csoportban minden tagnak pontosan két ismerőse van a csoport tagjai között. Szemléltess gráffal egy ilyen ismeretségi rendszert! (Az ismeretség kölcsönös.)
17. Egy baráti társaság minden tagja írt egy-egy SMS üzenetet a társaság minden további tagjának. Így mindenki 11 üzenetet írt. Hány SMS-t írtak egymásnak összesen a társaság tagjai?
18. Rajzolj le egy 4 pontú egyszerű gráfot, amelyben a pontok fokszáma rendre 3, 2, 2, 1!
19. Egy iskola asztalitenisz bajnokságán hat tanuló vesz részt. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Eddig Andi egy mérkőzést játszott, Barnabás és Csaba kettőt-kettőt, Dani hármat, Enikő és Feri négyet-négyet.
- Rajzold le az eddig lejátszott mérkőzések egy lehetséges gráfját!
 - Lehetséges-e, hogy Andi az eddig lejátszott egyetlen mérkőzését Barnabással játszotta? (Igen válasz esetén rajzoljon egy megfelelő gráfot; nem válasz esetén válaszd részletesen indokold!)
 - Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy a hat játékos közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva, ők eddig még nem játszották le az egymás elleni mérkőzésüket!

20. Mennyivel nagyobb a következő számok számtani közepe a mértani közepükénél?
- 3 és 27
 - 12 és 27
 - 20 és 45
21. Két szám számtani közepe 23, a kisebb szám 20. Mennyi a nagyobb szám?
22. Két szám mértani közepe 23, a kisebb szám 20. Mennyi a nagyobb szám?
23. Két szám számtani közepe 50, a nagyobb szám 70. Mennyi a kisebb szám?
24. Két szám mértani közepe 50, a nagyobb szám 70. Mennyi a kisebb szám?
25. Egy téglalap két szomszédos oldalának hossza 27 cm és 12 cm.
- Egy négyzet kerülete ugyanakkora, mint az adott téglalapé. Mekkora ennek a négyzetnek az oldalai?
 - Egy négyzet területe ugyanakkora, mint az adott téglalapé. Mekkora ennek a négyzetnek az oldalai?
26. Gyula papa azt találta egy banki hirdetésben, hogy a két évre lekötött befektetés esetén mindkét év végén megkapja a befektetett összeg 12%-át. Egy másik bankban kamatos kamatra lehetne két évre befektetni a pénzt, mindkét évben 12%-os éves kamatot fizetnek. A harmadik bank kétéves befektetés esetén szintén kamatos kamatot fizet, az első évre 8% éves kamatot, a második évre pedig 16%-ot. Melyik bank kínálata a legkedvezőbb?
27. Januárban Vígh úr üzletében és Bíró úr üzletében is 25 000 Ft volt a télikabát, márciusban mindkét üzletben 16 000 Ft. Bíró úr februárban és márciusban is ugyanannyival csökkentette a kabát árát, Vígh úr pedig februárban ugyanannyi százalékkal csökkentette a januári árat, mint ahány százalékkal márciusban a februárit. Melyikük üzletében volt olcsóbb a kabát februárban?
28. Szerkeszd meg a következő hosszúságú szakaszok számtani és mértani közepét!
- 4 cm és 6 cm;
 - 3 cm és 9 cm;
 - 5 cm és 8 cm.
29. Egy derékszögű háromszög befogóinak összege 5 cm. Legfeljebb mekkora lehet a területe, és a legnagyobb terület esetén mekkora a háromszög oldalai?
30. Egy derékszögű háromszög befogóinak összege 40 cm. Legfeljebb mekkora lehet a területe, és a legnagyobb terület esetén mekkora a háromszög oldalai?
31. Géza autóval 2 óra 24 perc alatt tett meg 150 km-t. Mennyi volt az átlagsebessége?
32. József autóval egy órán át 60km/h sebességgel, majd két órán át 80 km/h sebességgel haladt. Mennyi volt az átlagsebessége?
33. A gazdasági válság hatására 2008 novemberében 20%-kal, decemberben pedig 4%-kal csökkent az üzemanyagok ára. A két hónapot tekintve átlagosan hány %-os volt havonta a csökkenés?
34. Két négyzet kerületének összege 200 cm. Mennyi a négyzetek területösszegének a minimuma?