OKÉV
Országos Közoktatási Értékelési és Vizsgaközpont

A 2004-2005-ös tanév matematika OKTV II. kategória első fordulójának feladatai

1. feladat.
Az a_n sorozatot (n természetes szám) a következőképpen értelmezzük:

$a_0 = 2$ és $a_n = a_{n-1} - \dfrac{n}{(n+1)!}$, ha $n > 0$.

Adjuk meg a_n-t n függvényében!

1. megoldás. A sorozat képzési szabálya alapján kiszámoljuk az első néhány elemet:

$a_0 = 2$, $a_1 = \dfrac{3}{2}$, $a_2 = \dfrac{7}{6}$, $a_3 = \dfrac{25}{24}$, $a_4 = \dfrac{121}{120}$.

Ezek a számok a következő sejtéshez vezettek: $a_n = \dfrac{(n+1)!+1}{(n+1)!}$. 2 pont

Sejtésünket teljes indukcióval bizonyítjuk.

Kezdőlépés: $n = 0$-ra $a_0 = \dfrac{1!+1}{1!} = 2$, a kifejezés helyes.

Indukciós lépés: feltételezzük, hogy $a_n = \dfrac{(n+1)!+1}{(n+1)!}$ és ennek segítségével megmutatjuk, hogy $a_{n+1} = \dfrac{(n+2)!+1}{(n+2)!}$. A sorozat képzési szabálya, illetve az indukciós feltevés alapján:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{(n+1)!+1}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{(n+2)!+(n+2)-(n+1)}{(n+2)!} = \frac{(n+2)!+1}{(n+2)!}.$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük, valóban $a_n = 1 + \dfrac{1}{(n+1)!}$. 5 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Felhasználjuk, hogy

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

2 pont

Ekkor
$$\begin{aligned}
a_0 - a_1 &= \frac{1}{2!} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2!},\\
a_1 - a_2 &= \frac{2}{3!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!},\\
a_2 - a_3 &= \frac{3}{4!} = \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!},\\
&\vdots\\
a_{n-1} - a_n &= \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Ezeket összeadva

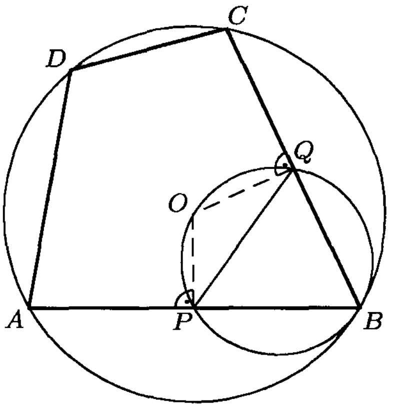
$$a_0 - a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!},$$

és így $a_n = 1 + \frac{1}{(n+1)!}$. 5 pont

Összesen: 7 pont

2. feladat.

Az $ABCD$ konvex négyszög csúcsai egy körön vannak. A szomszédos oldalak felezőpontjait összekötő szakaszok a négyszögből négy háromszöget vágnak le. Igazoljuk, hogy e négy háromszög körülírt körei egy ponton haladnak át!



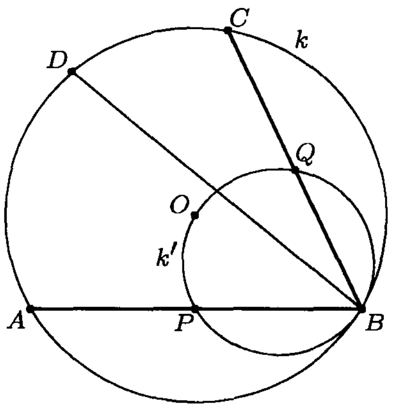
Megoldás. Legyen az AB oldal felezőpontja P, a BC oldal felezőpontja Q, az $ABCD$ négyszög köré írt kör középpontja O.

O rajta van AB felezőmerőlegesén, ezért OP merőleges AB-re. Hasonlóan O rajta van BC felezőmerőlegesén, ezért OQ merőleges BC-re. A Thalesz tétel megfordítása alapján az OB átmérőjű körön rajta van P és Q is. (Ez teljesül akkor is, ha AB a kör átmérője, mert ebben az esetben O azonos P-vel). Tehát a B csúcsnál levágott kis háromszög köré írt körön rajta van O. 5 pont

Ugyanilyen indoklással kapjuk, hogy O a többi csúcsnál levágott háromszögek köré írt körökön is rajta van, azaz a négy kör valóban egy ponton, O-n, halad át. 2 pont

Összesen: 7 pont

Meggondolandó a következő, **2. megoldás:**



Ha egy k kört egy B pontjából felére kicsinyítünk, akkor a kapott k' kör tartalmazza minden olyan húr felezőpontját, amely B-ből indul ki, tehát a B-n átmenő átmérő felezőpontját, a k kör O középpontját is. 3 pont

Ebből következik, hogy az A, B, C, D pontokból a négyszög köré írt kört felére kicsinyítve éppen a feladatban szereplő köröket kapjuk és ezek átmennek az adott kör O középpontján. 4 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Nem használtuk ki, hogy négyszögről van szó, az állítás tetszőleges körbe írt sokszögre igaz.

3. feladat.

Az a, b, c olyan pozitív egészek, amelyekre az $\frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c}$ tört értéke racionális szám. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ egész szám!

Megoldás. Legyen a tört értéke a racionális r szám. Az $\frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c}=r$ egyenlőség mindkét oldalát a nevezővel megszorozva és átrendezve kapjuk:

$$\sqrt{3}(a-rb)=rc-b.$$

A jobb oldal racionális. A bal oldalon $\sqrt{3}$ irracionális, $a-rb$ racionális. Ezek szorzata, csak $a-rb=0$ esetén lesz racionális.

Ekkor $a-rb=rc-b=0$, azaz $r=\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ és így $\quad b^2=ac.$ 3 pont

Ezt felhasználva

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2ab-2bc-2ac=(a+b+c)^2-2(ab+bc+b^2)=$$
$$=(a+b+c)^2-2b(a+b+c)=(a+b+c)(a-b+c).$$ 3 pont

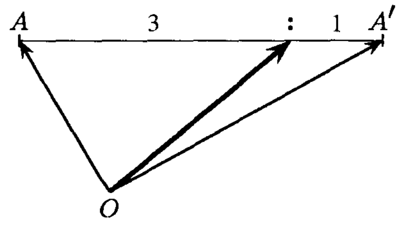
A vizsgált tört értéke tehát $a-b+c$, ami valóban egész. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. feladat.

Az ABC háromszög beírt körének középpontja O. Az OAB, OBC, OCA háromszögek súlypontjai rendre C', A', B'. Igazoljuk, hogy az AA', BB', CC' szakaszok egy ponton mennek át!

1. megoldás. Dolgozzunk O-ból induló helyvektorokkal, a pontokat jelölő nagybetűk jelöljék egyben helyvektorukat is.



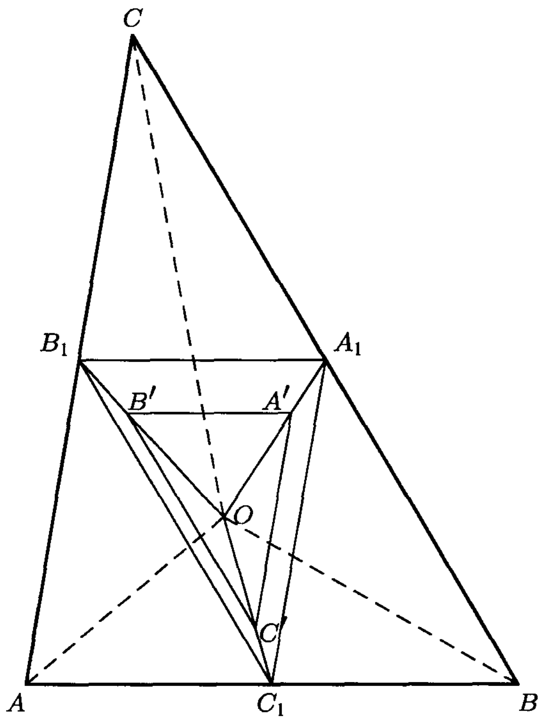
Mivel A' súlypont, ezért $A'=\frac{B+C}{3}$. 2 pont

Az AA' szakasz A'-höz közelebbi negyedelőpontjába mutató vektor:

$$\frac{3A'+A}{4}=\frac{3\frac{B+C}{3}+A}{4}=\frac{A+B+C}{4}.$$ 3 pont

Ugyanilyen indoklással kapjuk, hogy az $\frac{A+B+C}{4}$ helyvektorú pont a BB' és CC' szakaszoknak is a B'-höz, illetve C'-höz közelebbi negyedelőpontja, tehát a szakaszok egy ponton mennek át. 2 pont

Összesen: 7 pont



2. megoldás. Legyenek az ABC háromszög oldalfelező pontjai A_1, B_1, C_1, az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalai az ABC-nek középvonalai, ezért oldalai rendre párhuzamosak az ABC megfelelő oldalaival. 3 pont

Kicsinyítsük O-ból az $A_1B_1C_1$ háromszöget a $\frac{2}{3}$-ára, ekkor az $A_1B_1C_1$ pontok rendre az OBC, OCA, OAB háromszögek súlypontjaiba, azaz az A', B', C' pontokba mennek át, tehát az $A'B'C'$ háromszög oldalai rendre párhuzamosak az $A_1B_1C_1$ háromszögnek, és így az ABC háromszögnek az oldalaival is. Ebből következik, hogy az ABC és $A'B'C'$ háromszögek középpontosan hasonlók, ezért a megfelelő csúcsokat összekötő egyenesek: AA', BB', CC' átmennek a hasonlóság középpontján. 4 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés a pontozáshoz.

a) Gondosan elkészített helyes ábráért önmagában legfeljebb 1 pont

Koordináta-geometriai megoldás esetén:

b) A, B, C koordinátáival O koordinátáinak kifejezése 2 pont

(Ez a lépés nem feltétlenül szükséges.)

c) A' koordinátáinak felírása pl. $(X_{A'}; Y_{A'}) = \left(\frac{X_B + X_C + X_O}{3}; \frac{Y_B + Y_C + Y_O}{3}\right)$. 2 pont

Az *a*, *b*, *c* részeredmények pontszámai nem adódnak össze. Az a versenyző, aki eddig jut el, 2 pontot kap.

d) AA' egyenes egyenletének felírása, például:

$$Y - Y_A = \frac{Y_B + Y_C + Y_O - 3Y_A}{X_B + X_C + X_O - 3X_A}(X - X_A).$$ 2 pont

e) AA' és BB' metszéspontjának kiszámítása 2 pont

f) Az *e)*-ben meghatározott metszéspont CC'-n rajta van. 1 pont

Megjegyzés. Nem használtuk, hogy O a beírt kör középpontja, erre nincs is szükség. Sőt, O lehet az ABC háromszög síkján kívül is. Az AA', BB', CC' szakaszok az $ABCO$ tetraéder súlyvonalai, amelyek a tetraéder súlypontjában negyedelve metszik egymást.

5. feladat.

Igazoljuk, hogy 102 darab pozitív egész szám közül kiválasztható kettő úgy, hogy azok különbsége vagy összege osztható legyen 200-zal!

Megoldás. A számokat 200-zal való osztási maradékuk (a továbbiakban egyszerűen: maradékuk) szerint vizsgáljuk, ezek a maradékok: 0, 1, 2, ..., 198, 199. 1 pont

Felhasználjuk, hogy ha két szám maradéka egyenlő, akkor különbségük, ha pedig maradékaik összege 200, akkor összegük osztható 200-zal. 1 pont

Ha a 102 szám között van két egyenlő maradékú, akkor az előzőek szerint különbségük osztható 200-zal, tehát készen vagyunk. 1 pont

A továbbiakban ezért feltehetjük, hogy a 102 szám között nincs két azonos maradékú. Készítsünk 101 darab skatulyát, és mindegyiket címkézzük valamilyen maradékkal; az elsőt és az utolsót egy maradékkal, a többit két olyan maradékkal, amelyek összege 200:

	1	2	3		100	101
címke:	0	1; 199	2; 198	...	99; 101	100

Helyezzük most be mind a 102 számot abba a skatulyába, amelynek a címkéje a szám maradékát tartalmazza. Mivel 102 szám van és csak 101 skatulya, van olyan skatulya, amelybe két szám kerül; ezek különböző maradékúak, maradékuk összege 200, összegük tehát osztható 200-zal; állításunkat ezzel igazoltuk. 4 pont

Összesen: 7 pont