



**Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2008-2009. tanévi első fordulójának feladatmegoldásai
matematikából, a II. kategória számára**

1. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer valós megoldásait.

$$(1) \quad x^3 + y^3 = x,$$

$$(2) \quad 3x^2y + 3xy^2 = y.$$

Megoldás: A két egyenlet megfelelő oldalait összeadva kapjuk:

$$(x + y)^3 = x + y. \quad 2 \text{ pont}$$

Az egyenletet 0-ra rendezzük, majd szorzattá alakítjuk, így a következőt kapjuk:

$$(x + y)(x + y + 1)(x + y - 1) = 0.$$

Ez alapján $x + y$ értéke lehet 1, 0 vagy -1.

2 pont

Ha $x + y = 1$, akkor y helyébe $1 - x$ -et helyettesítünk az (1) egyenletbe

$$x^3 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3 = x, \quad \text{azaz} \quad 3x^2 - 4x + 1 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletét használva

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} \quad \text{innen} \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

Ha $x + y = 0$, akkor y helyébe $-x$ -et írva $x^3 - x^3 = x$, azaz $x_3 = 0$,

Ha $x + y = -1$, akkor y helyébe $-1 - x$ -et írva

$$x^3 - (1 + 3x + 3x^2 + x^3) = x, \quad \text{azaz} \quad 3x^2 + 4x + 1 = 0.$$

A megoldóképletből $x_4 = -1$, $x_5 = -\frac{1}{3}$.

Az $(x; y)$ megoldások tehát

$$(1; 0), \quad \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right), \quad (0; 0) \quad (-1; 0), \quad \left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$$

3 pont

Összesen: 7 pont

2. Tekintsük azokat a négyjegyű pozitív egész számokat, amelyeknek minden jegye különböző.

(a) Hány ilyen szám van?

(b) Mennyi ezeknek a számoknak az összege?

(c) Növekvő sorrendbe állítva őket melyik lesz a 2008-ik? (Az 1023 az első.)



Megoldás: (a) Jelölje a számot \overline{xyzv} . Balról jobbra sorba kiválasztjuk a jegyeket. Az ezresek helyén álló x nem lehet 0, a többi számjegy bármelyike lehet, tehát 9 lehetőségünk van. y bármi lehet, kivéve x , megint 9 lehetőségünk van. z csak 8 féle lehet, hiszen x és y már lefoglalt egy-egy jegyet. Eddig három jegyet használtunk, így v 7 féle lehet. A megfelelő számok száma $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$. 2 pont

(b) Ha az x helyén rögzítünk egy jegyet, a többi jegy a fentiek szerint $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ módon választható. Az x helyén az 1, 2, ..., 9 mindegyike ennyiszor szerepel, ezért a számok összegében az ezresek helyén álló jegyekből adódó rész $1000 \cdot (1+2+3+\dots+9) \cdot 504 = 22680000$.

Az y helyen rögzítve egy jegyet x 8 féle lehet, nem lehet 0 és y . Hasonlóan z 8 féle, v 7 féle lehet. Pontosan ugyanez igaz a tízes és egyes helyiértékre is, ezért innen az összeghez adódik

$$(100 + 10 + 1) \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 9) \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 2237760.$$

A számok összege tehát 24917760. 3 pont

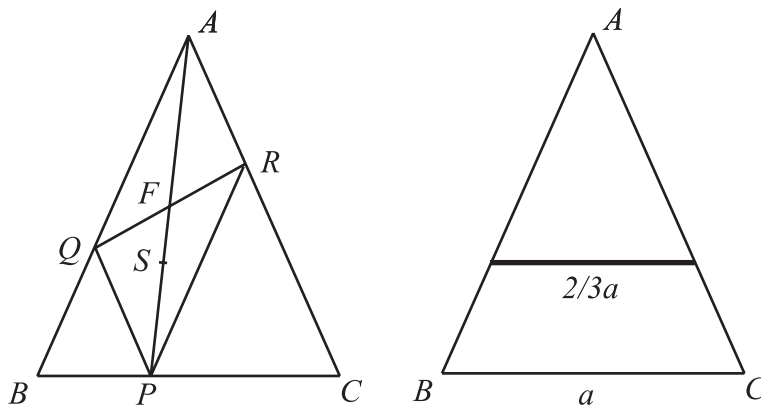
(c) Megmutatjuk, hogy a keresett szám a 4976. Már láttuk, hogy amennyiben x értéke rögzített, a többi jegyre $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ lehetőség van. A növekvő sorrendbe állított számok közül ezért az első 504 1-gyel kezdődik, a következő 504 2-vel, majd 3-mal és 4-gyel. Eddig ez $4 \cdot 504 = 2016$ szám, azaz a 2016. szám a lehető legnagyobb 4-gyel kezdődő, ami a 4987. Ha 498 a szám első három jegye, akkor az utolsó jegy 7 féle lehet, ezért a legnagyobb 497-tel kezdődő szám a 2009. és ez a 4978. A nagyság szerinti sorrendben ezt megelőző szám a 4976. 2 pont

Összesen: 7 pont

3. Az egyenlőszárú ABC háromszögben $AB = AC$. BC egy tetszőleges belső P pontjából a szárakkal párhuzamosokat húzunk. Az AC -vel párhuzamos az AB -t Q -ban, az AB -vel párhuzamos az AC -t R -ben metszi. Határozzuk meg a PQR háromszögek súlypontjának halmazát, mértani helyét.

Megoldás: Az $AQPR$ négyszög paralelogramma. Ennek átlói felezik egymást. Így a PQR háromszög S súlypontja rajta van az AP átlón. 1 pont

Legyen QR felezőpontja F . Az S súlypontról tudjuk, hogy $PS : SF = 2 : 1$. 1 pont





Ebből következik, hogy $AS : AP = 4 : 6 = 2 : 3$. Ez azt jelenti, hogy az A középpontú $2 : 3$ arányú hasonlóság P -t S -be viszi át. Ez a hasonlóság BC belső pontjaihoz a háromszögben egy BC -vel párhuzamos $\frac{2}{3}a$ hosszúságú szakasz belső pontjait rendeli.

3 pont

Ez utóbbi szakasz minden pontja a keresett ponthalmaz (mértani hely) pontja, ugyanis az A középpontú $3 : 2$ arányú hasonlóság a kapott szakasz belső pontjaihoz a BC megfelelő pontját rendeli.

2 pont

Összesen: 7 pont

4. Adottak az A , B és C számok:

$$A = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}, \quad B = (\sqrt{5} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{3}}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{3}}), \quad C = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}.$$

Igazoljuk, hogy bármely pozitív egész n esetén irracionális az alábbi szám:

$$\sqrt{(A + B - C)n + 2}.$$

Megoldás: A feladatban megadott A , B és C számokat más alakban írjuk fel.

$$A = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3}$$

$$B = (\sqrt{5} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{3}})(\sqrt{5} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{3}}) = 5 - 2\sqrt{3}$$

$$C = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{4 - 4\sqrt{3} + 3} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = 2 - \sqrt{3}$$

$$(A + B - C)n + 2 = (2 + \sqrt{3} + 5 - 2\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3})n + 2 = 5n + 2 \quad 3 \text{ pont}$$

Amennyiben n pozitív egész, az $5n+2$ alakú szám utolsó jegye 2, vagy 7. A négyzetszámok végződése csak 0, 1, 4, 5, 6, 9 lehet, tehát $5n + 2$ alakú szám nem lehet négyzetszám.

2 pont

Ezek szerint $(A + B - C)n + 2$ prímtényezői között van olyan q prím, amelynek kitevője a felbontásban páratlan. Tételezzük fel, hogy az általunk vizsgált szám racionális

$$\sqrt{(A + B - C)n + 2} = \frac{m}{k}$$

ahol m és k pozitív egészek. A nevezővel beszorozva és négyzetreemelve

$$k^2((A + B - C)n + 2) = m^2.$$

Mivel k^2 -ben és m^2 -ben q kitevője csak páros lehet, ezért a bal oldalon q kitevője páratlan, míg a jobb oldalon páros. Ez ellentmond a számelmélet alaptételének, feltevésünk nem lehet igaz, azaz $\sqrt{(A + B - C)n + 2}$ irracionális.

2 pont

Összesen: 7 pont.



5. A pozitív valós p paraméter segítségével definiáljuk a valós számok halmazán az f függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} p|x - 4| - 4p & \text{ha } x \geq 0, \\ -p|x + 4| + 4p & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

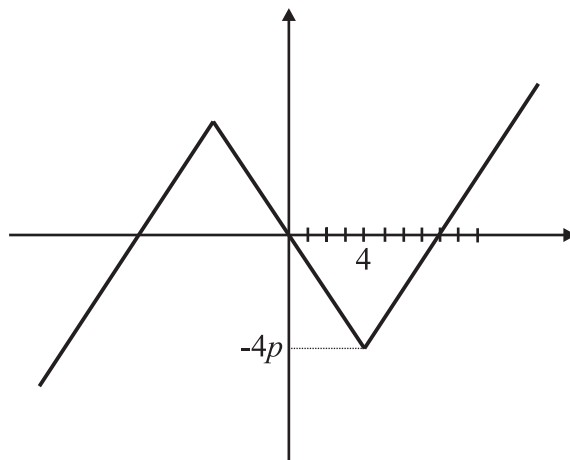
Határozzuk meg p értékét, ha tudjuk, hogy egyetlen olyan négyzet van, amelynek minden csúcsa rajta van f grafikonján.

Megoldás: Tekintsük először $x \geq 0$ esetén a függvényt. Kövessük nyomon, milyen transzformációkkal juthatunk az $|x|$ függvényből a feladatban kitűzött $f(x)$ -hez. $|x-4|$ azt jelenti, hogy a grafikont az x tengely pozitív iránya felé toljuk 4-gyel. Most megszorozzuk p -vel, ekkor a V alakú $|x-4|$ függvény félegyeneseinek meredeksége -1 és 1 -ről $-p$ -re illetve p -re változik, ez lesz $p|x-4|$. Végül levonunk $4p$ -t, azaz a grafikont $4p$ -vel letoljuk az y tengely negatív része felé. Éppen annyival toltuk le, hogy $f(0) = 0$ legyen.

Az f függvény páratlan, azaz $f(x) = -f(-x)$, ugyanis tekintve egy tetszőleges pozitív t és negatív $-t$ számnál a függvény definíciója szerint a helyettesítési értéket

$$p|t - 4| - 4p = -(-p|(-t) + 4| + 4p).$$

Így a grafikon -a meredekségeket meghatározó p értékétől függően- a következőképpen néz ki:



2 pont

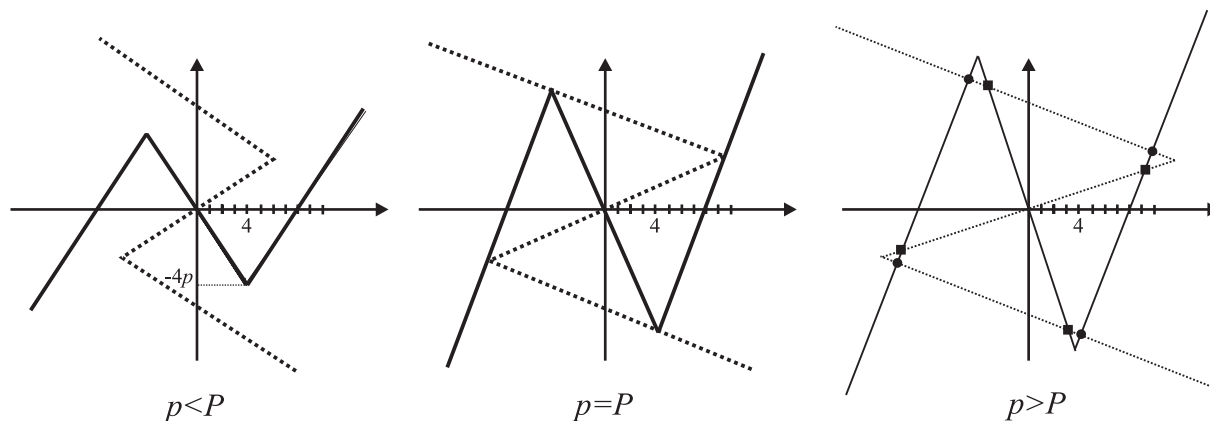
Használjuk ki, hogy az f függvény páratlan, azaz grafikonja középpontosan tükrös az origóra. Amennyiben van olyan négyzet, amelynek minden csúcsa a grafikonon van, de a középpontja nem az origó, akkor ennek a négyzetnek az origóra vonatkozó tükörképe is a grafikonon lenne és így nem teljesülne a feladat feltétele. Tehát annak az egyetlen négyzetnek, amelynek minden csúcsa rajta van f grafikonján éppen az origó a középpontja.

1 pont

A négyzet forgásszimmetrikus a középpontjára vonatkozó 90° -os forgatásra nézve. Forgassuk el ezért a grafikont is 90° -kal az origó körül. Ennek az elforgatott alakzatnak éppen négy közös pontja lehet f grafikonjával és ezek a négyzet csúcsai. A megfelelő p értéket P -vel jelöljük. Az eredeti és az elforgatott grafikont szemléltetjük, $0 < p < P$ esetén nincs



közös pontjuk, $p = P$ esetén négy közös pont van, $P < p$ esetén 8 közös pont van és ennek megfelelően két négyzet. Ezek csúcsait az ábrán jelöltük. 2 pont



Most meghatározzuk P -t. $f(4) = -4p$, a grafikon lokális minimumpontjának koordinátái $(4; -4p)$. Ennek origó körüli 90° -os elforgatottja $(4p; 4)$. Ennek rajta kell lenni a grafikonon, azaz a megfelelő P esetén $f(4P) = 4$ és $4P > 4$. Tehát $P|4P - 4| - 4P = 4$, de $4P > 4$ miatt $|4P - 4| = 4P - 4$ és így $P(4P - 4) - 4P = 4$. Ennek megoldásai

$$P_1 = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2} \quad \text{és} \quad P_2 = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}.$$

A feladat szövege szerint p pozitív, így a paraméter egyetlen megfelelő értéke az $1 + \sqrt{2}$. 2 pont

Összesen: 7 pont.