Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2009-2010. tanévi első fordulójának feladatmegoldásai matematikából, a II. kategória számára

1. Adott a következő polinom:

$$P(x) = x^2 + (x+2)^2 + (x+4)^2 + ... + (x+2008)^2 - (x+1)^2 - (x+3)^2 - ... - (x+2009)^2.$$

Mely valós x értékek esetén teljesül, hogy $P(x) > 0$?

Megoldás: Rendezzük a $P(x)$ polinomban szereplő négyzetes tagokat párokba

$$P(x) = \left(x^2 - (x+1)^2\right) + \left((x+2)^2 - (x+3)^2\right) + ... + \left((x+2008)^2 - (x+2009)^2\right).$$

3 pont

Használjuk a két négyzet különbségére vonatkozó nevezetes azonosságot, az összeg egy általános tagja így alakul

$$\left((x+2i)^2 - (x+2i+1)^2\right) = (x+2i-x-2i-1)(x+2i+x+2i+1) = -1\cdot(2x+4i+1).$$

Ennek segítségével $P(x)$ a következő alakra hozható

$$P(x) = -1005\cdot 2x - (1+5+9+13+...+4017) = -1005(2x+2009).$$ 3 pont

Most választ adunk a feladatban feltett kérdésre

$$-1005(2x+2009) > 0 \quad \text{ha} \quad x < -\frac{2009}{2}.$$ 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Melyik az a legnagyobb csupa különböző számjegyet tartalmazó pozitív egész szám, amelynek a számjegyeit tetszőleges sorrendben véve mindig prímszámot kapunk?

Megoldás: Van a feladat feltételeinek eleget tevő kétjegyű szám, pl a 13. A keresett legnagyobb szám ezek szerint legalább kétjegyű. 1 pont

Nem lehet páros számjegy benne, ugyanis a páros jegyet a szám végére téve 2-nél nagyobb páros számot kapunk, ami nem lehet prím. 1 pont

Hasonlóan kapjuk, hogy 5-ös számjegy sem lehet benne. Ha az 5 az utolsó jegy, akkor a szám 5-tel osztható, 5-nél nagyobb, tehát nem prím. 1 pont

A szám jegyei ezek szerint az 1, 3, 7 és 9 lehetnek.

A szám nem lehet négyjegyű. Ekkor jegyei éppen az említett négy szám, de a 7 osztója a 9317-nek. 1 pont

A szám nem lehet háromjegyű, mindig lesz olyan sorrendje a jegyeknek, hogy számunk 7-tel osztható. Ha az 1, 3, 7 vagy 9 marad ki, akkor a 7-tel osztható szám rendre a 973, 917, 931 és a 371. 2 pont

A kétjegyű számok közül a 97 jó, hiszen 97 és 79 is prím. Ennél nagyobb kétjegyű prím nincs, így a keresett szám a 97. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$11^x + 14^x = 25^x - 2\left(\sqrt{154}\right)^x.$$

Megoldás: Használjuk ki, hogy $\sqrt{154} = \sqrt{11}\cdot\sqrt{14}$, az egyenlet mindkét oldalához hozzáadunk $2\left(\sqrt{154}\right)^x$-et és a bal oldalon teljes négyzetté alakítunk:

$$11^x + 14^x + 2\left(\sqrt{11}\cdot\sqrt{14}\right)^x = \left(\left(\sqrt{11}\right)^x + \left(\sqrt{14}\right)^x\right)^2 = \left(5^x\right)^2.$$

Mindkét oldalon pozitív szám négyzete szerepel, ezért négyzetgyököt vonhatunk:

$$\left(\sqrt{11}\right)^x + \left(\sqrt{14}\right)^x = 5^x.$$ 3 pont

Osztunk 5^x-nel:

$$\left(\frac{\sqrt{11}}{5}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{14}}{5}\right)^x = 1.$$

Az $x = 2$ megoldás, hiszen

$$\left(\frac{\sqrt{11}}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{14}}{5}\right)^2 = \frac{11}{25} + \frac{14}{25} = 1.$$ 1 pont

Megmutatjuk, hogy nincs más megoldás. Mivel $\frac{\sqrt{11}}{5} < 1$ és $\frac{\sqrt{14}}{5} < 1$, ezért a $\left(\frac{\sqrt{11}}{5}\right)^x$ és $\left(\frac{\sqrt{14}}{5}\right)^x$ exponenciális függvények szigorúan monoton csökkenők. A két függvény összege is szigorúan monoton csökkenő, ezért az 1 értéket csak egyszer veheti fel és azt az $x = 2$-nél fel is vette. 3 pont

Összesen: 7 pont

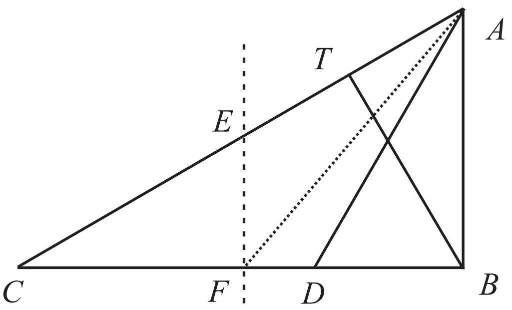
4. Az ABC háromszög területét az A csúcsból induló belső szögfelező 1:2 arányban osztja. Milyen arányban osztja fel a háromszög területét az a magasságvonal, amely a háromszög legnagyobb szögű csúcsából indul, ha BC felezőmerőlegese a területet

(a) $1:3$; (b) $1:2$

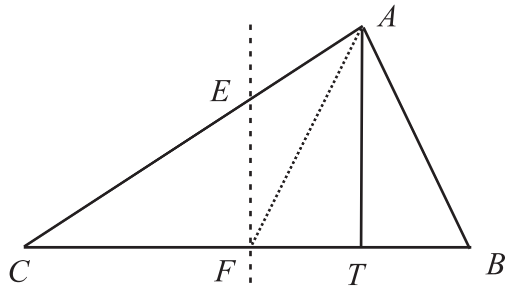
arányban osztja?

Megoldás: Ha $AB = AC$, akkor a feladat feltételei nem teljesülnek. A továbbiakban legyen az A-ból induló oldalak közül AB a kisebb. Legyen az A csúcsból induló belső szögfelező és BC közös pontja D. Mivel az ABD és ADC háromszögek A-hoz tartozó magasságai egyenlők és területük aránya 1:2, ezért az A-val szemközti oldalaik aránya is ennyi, $BD : DC = 1 : 2$. A szögfelező tétel segítségével azt kapjuk, hogy $AB : AC = 1 : 2$. 1 pont

(a) Mivel feltettük, hogy $AB < AC$ ezért a BC oldal felező merőlegese az AC oldalt metszi, legyen a metszéspont E, BC felezőpontja F. A feladat feltétele szerint $t_{ABC} = 4t_{CFE}$. Az AF felezi a területet, így $t_{AFC} = 2t_{CFE}$, tehát E felezi az AC oldalt. Azt



(a) rész



(b) rész

kaptuk, hogy a BC felezőmerőlegesén levő EF szakasz az ABC háromszög középvonala. Mivel EF középvonal párhuzamos AB oldallal, ezért $ABC\angle = 90°$.

$ABC\angle = 90°$, ezért $AB : AC = \cos\alpha = 1 : 2$, amiből $\alpha = 60°$ és így $\gamma = 30°$.

A derékszögű csúcsból induló magasság talppontja legyen T. Az ATB és TBC háromszögek B-hez tartozó magassága ugyanakkora, ezért területeik aránya éppen az AT és TC oldalaik aránya. Ebből megkapjuk a feladat kérdésére a választ:

$$t_{ATB} : t_{TBC} = AT : TC = (BT \cdot \mathrm{ctg}60°) : (BT \cdot \mathrm{ctg}30°) = 1 : 3. \qquad 3 \text{ pont}$$

(b) Most $t_{AFC} = \frac{3}{2} t_{CFE}$, így $t_{CFE} : t_{EFA} = CE : EA = 2 : 1$. Legyen az A-ból induló magasság talppontja T. Az $ACT\angle$-ben párhuzamos szelők EF és AT ezért $CE : EA = CF : FT = 2 : 1$. Mivel F felezi BC-t, ezért T felezi FB-t.

Az ABT és ADC háromszögekre felírt Pitagorasz tétel segítségével

$$AT^2 = AB^2 - BT^2 = AC^2 - CT^2.$$

Felhasználva, hogy $AC = 2AB$ és $CT = 3BT$ kapjuk, hogy $AB^2 - BT^2 = (2AB)^2 - (3BT)^2$, amiből $\sqrt{\frac{8}{3}}BT = AB$. Az ABC háromszög oldalainak aránya BT-vel kifejezve

$$AB : AC : BC = \sqrt{\frac{8}{3}} : 2\sqrt{\frac{8}{3}} : 4 \quad \text{és} \quad 2\sqrt{\frac{8}{3}} < 4$$

így a legnagyobb oldal BC, a legnagyob szög A-nál van. Válaszunk most is 1:3, hiszen $t_{ATB} : t_{ATC} = BT : TC = 1 : 3$. 3 pont

Összesen: 7 pont

5. Az $\{1; 2; 3; ...; 2009\}$ halmazból legalább hány számot kell kiválasztani, hogy biztosan legyen a kiválasztott számok között két olyan, amelyek különbsége 4?

Megoldás: Ha 1005 számot választanak ki, akkor lehetséges, hogy nincs köztük két olyan, amelyek különbsége 4. Erre példa, ha a kiválasztott számok a 8-cal osztva 1, 2, 3 és 4 maradékot adó számok. Ezek $\{1; 2; 3; 4; 9; 10; 11; 12; ...; 2001; 2002; 2003; 2004; 2009\}$, számuk éppen 1005. 2 pont

Megmutatjuk, hogy amennyiben legalább 1006 számot választunk, akkor biztosan lesz két olyan, amelyek különbsége 4. Vegyünk 1005 papírt és ezekre írjuk fel számainkat. A

1	2	3	4	9	10	....	2003	2004	2009
5	6	7	8	13	14		2007	2008	

2009 egyedül lesz egy papíron, a többi párosával. Legyen k nemnegatív egész, $k < 251$, és $m \in \{1; 2; 3; 4\}$ ekkor egy papírra kerül $8k + m$ és $8k + m + 4$.

Ha legalább 1006 számot választunk, melyeket 1005 papírra írtunk, akkor lesz köztük 2 ugyanarról a papírról. Ezek különbsége pedig 4. 5 pont

Összesen: 7 pont.