Oktatási Hivatal

SZAKKÖZÉPISKOLA

Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2007/2008
Matematika I. kategória

Az 1. forduló feladatai

1. **Oldja meg a valós számok halmazán a**

$$\log_{2x} x + \log_{8x^2} x = 0$$

egyenletet!

2. **Legyenek** x **és** y **olyan pozitív egészek, melyek eleget tesznek a**

$$4y^2 - 9x^2 = 2007$$

egyenletnek.

Mennyi az összes összetartozó x **és** y **érték szorzatának legnagyobb prímosztója?**

3. **Az** $ABCD$ **trapéz** AB **alapjának hossza háromszorosa a** CD **alapnak és az** AD **szárnak. Az** AC **átló hossza 5 egység, a** BC **szár hossza 10 egység.**
Mekkorák az $ABCD$ **trapéz oldalai?**

4. **Bizonyítsa be, hogy** $2006^{2007} + 2008^{2006} + 2007$ **osztható** 7**-tel!**

5. **Bizonyítsa be, hogy egy tetszőleges háromszög** a, b, c**-vel jelölt oldalai között akkor és csak akkor áll fenn az** $a \le b \le c$ **egyenlőtlenség, ha az** s_a, s_b, s_c**-vel jelölt súlyvonalakra fennáll az** $s_a \ge s_b \ge s_c$ **egyenlőtlenség!**

6. **András és Balázs kosárra dobásban méri össze tudását.**
Annak valószínűsége, hogy András a kosárba talál 0,7; míg Balázs 0,4 valószínűséggel dob kosarat.
Egy játszmában mindegyikük egyszer dob.
Ha András talál, és Balázs nem, akkor András nyer.
Ha Balázs talál, és András nem, akkor Balázs nyer.
Minden más esetben a játszma eredménye döntetlen.
Mennyi a valószínűsége annak, hogy két egymás utáni játszma mindegyike döntetlen lesz?

Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér.

Oktatási Hivatal

GIMNÁZIUM

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2007-2008. tanévi első fordulójának feladatai matematikából, a II. kategória számára

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\log_2(1 + \cos(2x)) = 2^{1+\cos(3x)}.$$

2. Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja F, az AB oldal egy belső pontja T, az AF és CT szakaszok metszéspontja M. Az ATM háromszög területe 8, a CFM háromszög területe 15 egység. Mekkora lehet az ABC háromszög területe?

3. Határozzuk meg, mely a és b egész számokra igaz:

$$\frac{b}{a-1} + \frac{a-4}{b+1} = 1.$$

4. Bizonyítsuk be, hogy egy olyan téglalap alapú gúlában, amelyben a gúla magasságának a talppontja az alap valamely csúcsába esik, a leghosszabb oldalél hosszának negyedik hatványa legalább hatszorosa az oldallapok területei négyzetösszegének.

5. Adott az

$$x \longmapsto \frac{2x+1}{2} - \sqrt{x^2 + x}$$

függvény, ahol $x \geq 0$.

(a) Monoton nő, vagy csökken a függvény?

(b) Melyik az a legkisebb pozitív egész n, amelyre $f(n) < \dfrac{1}{2008}$?

Valamennyi feladat 7 pontot ér.