Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2008/2009
Matematika I. kategória

Az 1. forduló feladatai

1. Bizonyítsa be, hogy a kocka éléből, lapátlójából és testátlójából háromszög szerkeszthető, és ennek a háromszögnek van két egymásra merőleges súlyvonala!

2. Legyenek az a, b, c, d számok pozitív valós számok! Igazolja, hogy $\sqrt{a \cdot b} + \sqrt{c \cdot d} \leq \sqrt{(a+d) \cdot (b+c)}$!

3. Ha az x, y, z valós számok eleget tesznek az

$$x + 3y + 5z = 200$$

és az

$$x + 4y + 7z = 225$$

egyenleteknek, akkor mennyi a

$$K = x + y + z$$

értéke?

4. Oldja meg a valós számok halmazán az

$$\frac{[x]}{\{x\}} = 2008$$

egyenletet!
($[x]$ az x valós szám egészrésze, azaz az x-nél nem nagyobb egész számok közül a legnagyobb, $\{x\}$ pedig az x valós szám törtrésze, azaz $\{x\} = x - [x]$)

5. Az ABC háromszög AC oldalán az E belső pont úgy helyezkedik el, hogy $EC = AB$. Legyen F a BC, M pedig az AE szakasz felezőpontja. Határozzuk meg a háromszög A csúcsánál lévő szögét, ha $FME\angle = 18°$!

6. Hányféle módon állítható elő a 2008 néhány (egynél több) egymást követő pozitív egész szám összegeként?

Minden feladat hibátlan megoldásáért 10 pont adható.
Az elérhető maximális pontszám 60 pont.

Oktatási Hivatal

GIMNÁZIUM

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2008-2009. tanévi első fordulójának feladatai
matematikából, a II. kategória számára

1. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer valós megoldásait.

$$x^3 + y^3 = x, \tag{1}$$

$$3x^2y + 3xy^2 = y. \tag{2}$$

2. Tekintsük azokat a négyjegyű pozitív egész számokat, amelyeknek minden jegye különböző.
(a) Hány ilyen szám van?
(b) Mennyi ezeknek a számoknak az összege?
(c) Növekvő sorrendbe állítva őket melyik lesz a 2008-ik? (Az 1023 az első.)

3. Az egyenlőszárú ABC háromszögben $AB = AC$. BC egy tetszőleges belső P pontjából a szárakkal párhuzamosokat húzunk. Az AC-vel párhuzamos az AB-t Q-ban, az AB-vel párhuzamos az AC-t R-ben metszi. Határozzuk meg a PQR háromszögek súlypontjának halmazát, mértani helyét.

4. Adottak az A, B és C számok:

$$A = \frac{1}{2-\sqrt{3}}, \qquad B = \left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{3}}\right), \qquad C = \sqrt{7-4\sqrt{3}}.$$

Igazoljuk, hogy bármely pozitív egész n esetén irracionális az alábbi szám:

$$\sqrt{(A+B-C)n+2}.$$

5. A pozitív valós p paraméter segítségével definiáljuk a valós számok halmazán az f függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} p|x-4| - 4p & \text{ha } x \geq 0, \\ -p|x+4| + 4p & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Határozzuk meg p értékét, ha tudjuk, hogy egyetlen olyan négyzet van, amelynek minden csúcsa rajta van f grafikonján.

Valamennyi feladat 7 pontot ér.