OKÉV
Országos Közoktatási Értékelési és Vizsgaközpont

SZAKKÖZÉPISKOLA

A 2004–2005-ös tanév matematika OKTV I. kategória (szakközépiskolások) első fordulójának feladatai

1. feladat

Melyek azok a 10-es számrendszerbeli háromjegyű pozitív egész számok, amelyeknek számjegyei közül valamelyik a 3-as, továbbá a számjegyek összege és szorzata egyenlő? 9 pont

2. feladat

Az ABC háromszög AB oldalán vegyük föl az M és N pontokat úgy, hogy $AM = MN = NB$ legyen. Jelölje A_1 a BC és B_1 az AC oldalak felezőpontját, valamint P legyen a BB_1 és CN, K pedig az AA_1 és CM szakaszok metszéspontja! Fejezze ki a PK szakasz hosszát az AB oldal hosszával! 10 pont

3. feladat

Oldja meg az

$$x^2 \cdot y^2 - 7x \cdot y^2 + 10y^2 + 44xy - 154y + 484 = 0$$

egyenletet, ha x és y pozitív prímszámok! 11 pont

4. feladat

Van-e olyan n természetes szám, amelyre az $A = 3n^2 + 3n + 7$ kifejezés egy természetes szám köbével egyenlő? 12 pont

5. feladat

A szimmetrikus $ABCD$ trapéz hosszabbik alapja AB. Az ABC háromszögbe írt kör középpontja O_1, a BCD háromszögbe írt kör középpontja O_2.

Bizonyítsa be, hogy O_1O_2 merőleges AB-re! 13 pont

6. feladat

Egy elektronikus levelezőtársaságnak 2004 tagja van. Közülük néhányan személyesen is ismerik egymást (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsa be, hogy a 2004 tag két csoportba osztható úgy, hogy a csoportokon belüli személyes ismeretségek számának összege nem több, mint a két csoport tagjai közötti ismeretségek száma! 15 pont

GIMNÁZIUM

A 2004-2005-ös tanév matematika OKTV II. kategória (gimnáziumok) első fordulójának feladatai

1. feladat.

Az a_n sorozatot (n természetes szám) a következőképpen értelmezzük:

$a_0 = 2$ és $a_n = a_{n-1} - \dfrac{n}{(n+1)!}$, ha $n > 0$.

Adjuk meg a_n-t n függvényében! 7 pont

2. feladat.

Az $ABCD$ konvex négyszög csúcsai egy körön vannak. A szomszédos oldalak felezőpontjait összekötő szakaszok a négyszögből négy háromszöget vágnak le. Igazoljuk, hogy e négy háromszög körülírt körei egy ponton haladnak át! 7 pont

3. feladat.

Az a, b, c olyan pozitív egészek, amelyekre az $\dfrac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c}$ tört értéke racionális szám. Bizonyítsuk be, hogy $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ egész szám! 7 pont

4. feladat.

Az ABC háromszög beírt körének középpontja O. Az OAB, OBC, OCA háromszögek súlypontjai rendre C', A', B'. Igazoljuk, hogy az AA', BB', CC' szakaszok egy ponton mennek át! 7 pont

5. feladat.

Igazoljuk, hogy 102 darab pozitív egész szám közül kiválasztható kettő úgy, hogy azok különbsége vagy összege osztható legyen 200-zal! 7 pont