A 2003/2004. tanévi matematika OKTV II. kategória

első (iskolai) fordulója feladatainak megoldásai

1. feladat.

A táblára felírtuk a 0-tól 2003-ig terjedő egész számokat (tehát összesen 2004 db számot). Mekkora a táblán levő számjegyek összege?

$$\begin{array}{c} 0\,0\,0 \\ 0\,0\,1 \\ \vdots \\ 2\,9\,7 \\ \vdots \\ 9\,9\,9 \end{array}$$

Megoldás. Először a 0-tól 999-ig terjedő számok jegyeinek az összegét számítjuk ki; egyszerűség kedvéért itt minden számot nullákkal háromjegyűvé egészítünk ki (pl. 2 helyett 002-t írunk). Ezeket a számokat egymás alá írjuk; mivel minden ilyen háromjegyű számot úgy kaphatunk meg, hogy minden jegyét 10 jegy közül tetszőlegesen választhatjuk, ezért minden oszlopban minden jegyből ugyanannyi lesz, ti. 100 darab. Az egy oszlopban levő számjegyek összege így

$$100(1+2+\ldots+9)=4500,$$

a három oszlopban pedig összesen $3\cdot 4500=13\,500$; a 0–999 számok jegyeinek összege tehát 13 500. 3 pont

Az 1000–1999 számokat úgy kaphatjuk meg, hogy a fenti oszlopban minden sor elé egy 1-est írunk, ezért az 1000–1999 számok jegyeinek összege: $1000+13\,500=14\,500$. 3 pont

A 2000–2003 számok jegyeinek összege 14, ezért a kérdéses jegyösszeg

$$13\,500+14\,500+14=28\,014.$$ 1 pont

Összesen: 7 pont

2. feladat.

Határozzuk meg azokat a valós számokat, amelyek kielégítik a következő egyenletrendszert:

$$\lg(x-y)+\lg 2=\frac{1}{2}(\lg x-\lg y),$$
$$\lg(x+y)-\lg 3=\frac{1}{2}(\lg y-\lg x).$$

Megoldás.

Egyenletrendszerünk logaritmusmentes alakja:

$$2(x-y)=\sqrt{\frac{x}{y}},$$
$$\frac{x+y}{3}=\sqrt{\frac{y}{x}}.$$ 2 pont

$x>y>0$, mivel logaritmusaik léteznek.

E két egyenlet megfelelő oldalainak a hányadosa:

(1) $$\frac{6(x-y)}{x+y}=\frac{x}{y}.$$

Ugyanezek szorzata:

(2) $$\frac{2}{3}(x^2-y^2)=1, \qquad \text{azaz} \qquad 2(x^2-y^2)=3.$$

Az (1) egyenlet bal oldali törtjének a számlálóját és nevezőjét elosztjuk y-nal, majd bevezetjük a következő jelölést:

$$\frac{x}{y}=z.$$

$$\frac{6\left(\frac{x}{y}-1\right)}{\frac{x}{y}+1}=\frac{6z-6}{z+1}=z, \qquad \text{azaz} \qquad z^2-5z+6=0.$$

Ebből

$$z_1=3=\frac{x_1}{y_1}, \qquad z_2=2=\frac{x_2}{y_2},$$

és így

$$x_1=3y_1, \qquad x_2=2y_2.$$ 3 pont

Ezeket az értékeket (2)-be helyettesítve kapjuk:

$$2(9y_1-y_1^2)=3, \qquad y_1^2=\frac{3}{16}.$$

Mivel az ismeretlenek számértéke csak pozitív lehet,

$$y_1=\frac{\sqrt{3}}{4}, \qquad x_1=\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$ 1 pont

Továbbá:

$$2(4y_2^2-y_2^2)=3, \qquad y_2^2=\frac{1}{2},$$

$$y_2=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad x_2=\sqrt{2}.$$

A megoldások tehát:

$$\left(\frac{3\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \qquad \text{és} \qquad \left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

ezek valóban ki is elégítik az egyenletrendszert. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés. A feladat más gondolatmenettel is megoldható; pl. (1)-ből, illetve (2)-ből átalakításokkal kapjuk, hogy

$$(3)\qquad 5xy-6y^2=x^2, \qquad \text{illetve} \qquad x^2=\frac{3}{2}+y^2.$$

E két egyenlet összevetéséből

$$5xy-6y^2=\frac{3}{2}+y^2, \qquad x=\frac{14y^2+3}{10y}.$$ 3 pont

Ezt (3)-ba helyettesítve a

$$32y^4-22y^2+3=0$$

egyenlet adódik, ebből

$$y_1^2=\frac{3}{16}, \qquad y_2^2=\frac{1}{2},$$

a továbbiak az előző megoldás mintájára folytathatók.

Általában pontozásnál a következőket tartsuk szem előtt: a logaritmusmentes alakért 2 pont, az egyik ismeretlen közvetlen kifejezéséért a másik ismeretlennel 3 pont, gyökpáronként 1-1 pont adható.

3. feladat.

Az $a_1, a_2, \ldots, a_{80}$ nyolcvantagú sorozatban a tagok pozitívak, az első és utolsó tagon kívül minden tag egyenlő két szomszédjának a szorzatával. Az első 40 tag szorzata 8, ugyanennyi mind a 80 tag szorzata is. Írjuk fel a sorozat első 8 tagját.

Megoldás.

Ha a_n a sorozat valamely belső tagja, a feltétel szerint $a_n=a_{n-1}\cdot a_{n+1}$, azaz

$$(1)\qquad a_{n+1}=\frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Ez azt jelenti, hogy minden tag a megelőző kettő hányadosa, tehát két egymást követő tag egyértelműen meghatározza az összes utánuk következőt. Egyszerűség kedvéért legyen $a_1=a$, $a_2=b$, ekkor a sorozat kezdő tagjai az (1) képzési szabály szerint

$$a,\ b,\ \frac{b}{a},\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{a}{b},\ a,\ b,$$

ezek szerint a sorozat tagjai a hetediktől kezdve újra ismétlődnek, 6-os periódussal rendelkeznek,

$$a_n=a_{n+6}.$$ 3 pont

Az első 40 tag szorzata, mivel $40=6\cdot 6+4$:

$$\left(a\cdot b\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{a}{b}\right)^6\cdot a\cdot b\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{a}=1^6\cdot\frac{b^2}{a}=\frac{b^2}{a},$$

ezért

(2) $$\frac{b^2}{a} = 8.$$ 1 pont

A 80 tag szorzata ($80 = 13 \cdot 6 + 2$):

$$1^{13} \cdot ab = ab,$$

(3) $$ab = 8.$$ 1 pont

A (2) és (3) egyenletek megfelelő oldalainak a szorzata:

$$\frac{b^2}{a} \cdot ab = b^3 = 64,$$

ebből

$$b = 4 \qquad \text{és} \qquad a = 2.$$ 1 pont

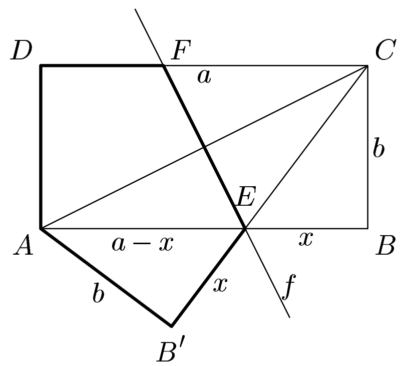
A sorozat első 8 tagja:

$$2,\ 4,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 2,\ 4.$$ 1 pont

Összesen: 7 pont

4. feladat.

Kivágtuk papírból a 72 cm^2 területű $ABCD$ téglalapot, majd összehajtottuk úgy, hogy a C csúcs éppen az A csúcsot fedje. Az összehajtott papírlap pontosan egy olyan ötszög alakját veszi fel, amelynek a területe a téglalap területének a 68,75%-a. Mekkorák az $ABCD$ téglalap oldalai?



1. megoldás. Legyen $AB = a$, $BC = b$. Egy összehajtott papírlapon azok a pontok fedik egymást, amelyek eredeti helyzetükben tükrösek arra az egyenesre, amely mentén az összehajtás történt; ezért az A és C csúcsok tükrösek az AC átló f felező merőlegesére. 1 pont

Jelölje f metszéspontját AB-vel E, CD-vel F, az összehajtással az $AB'EFD$ ötszöget kapjuk, ahol B' a B csúcs f-re vonatkozó tükörképe. Az összehajtás az EBC derékszögű háromszöget az $EB'A$ háromszögbe viszi át, ezért $AB' = CB = b$, $EB = EB' = x$ és így

(∗) $$AE = a - x.$$

Az $AB'EFD$ ötszög területe a feladat szerint $\frac{72 \cdot 68{,}75}{100} = 49{,}5$ (cm^2-ekben mérve). Az $AEFD$ négyszög éppen fele a téglalapnak, ezért a területe 36, az $EB'A$ derékszögű háromszög területére tehát $49{,}5 - 36 = 13{,}5$ marad. 2 pont

Az a, b, x méretek között a következő összefüggések ismertek: a téglalap területe $ab = 72$; az $EB'A$ derékszögű háromszög kétszeres területe $bx = 2 \cdot 13{,}5 = 27$; ugyanerre Pitagorasz tételéből

$$b^2 + x^2 = (a - x)^2 = a^2 - 2ax + x^2$$ 2 pont

$$b^2 = a^2 - 2ax.$$

Mivel $a = \dfrac{72}{b}$, $x = \dfrac{27}{b}$, ezeket az előbbi egyenletbe helyettesítve egyismeretlenes egyenletet kapunk:

$$b^2 = \frac{72^2}{b^2} - \frac{2 \cdot 72 \cdot 27}{b^2}, \qquad b^4 = 1296, \qquad b = 6,$$

és így $a = 12$. Az $ABCD$ téglalap oldalai: 12 cm és 6 cm. 2 pont

---

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Megoldásunk első része a ($*$)-gal jelzett pontig megegyezik előző megoldásunkkal. Mivel az $AEFD$ négyszög területe a téglalap területének az 50%-a, azért az $EB'A$ háromszög területe a téglalap területének a $68{,}75 - 50 = 18{,}75\%$-a. Viszont $18{,}75\% = \dfrac{18{,}75}{100} = \dfrac{3}{16}$, tehát az $EB'A$ háromszög területe a téglalap területének $\dfrac{3}{16}$ része, ezért 2 pont

$$\frac{bx}{2} = \frac{3ab}{16}, \qquad \text{ebből} \qquad x = \frac{3a}{8},$$ 2 pont

amiből $a - x = \dfrac{5a}{8}$ következik. Ezekkel az adatokkal alkalmazzuk Pitagorasz tételét az $EB'A$ háromszögre:

$$b^2 + \left(\frac{3a}{8}\right)^2 = \left(\frac{5a}{8}\right)^2, \qquad 64b^2 = 16a^2,$$

$$a = 2b.$$ 2 pont

A téglalap területe:

$$ab = 2b \cdot b = 2b^2 = 72,$$

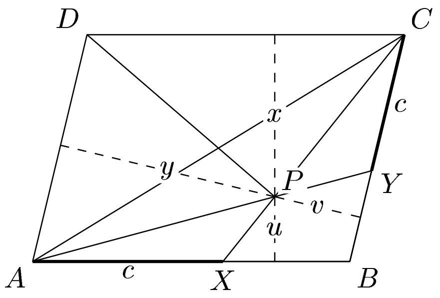
amiből $b = 6$ cm és $a = 12$ cm. 1 pont

Összesen: 7 pont

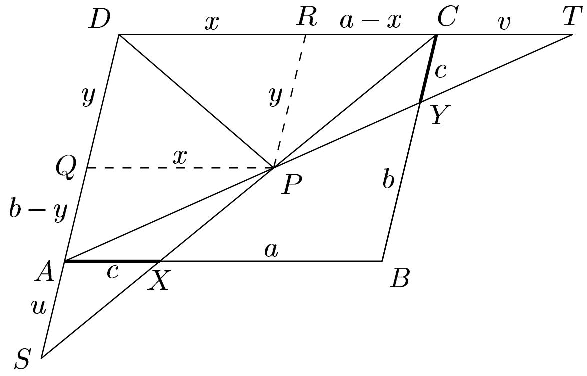
5. feladat.

Az $ABCD$ paralelogramma AB oldalán úgy jelöljük ki az X és a BC oldalán az Y pontot, hogy $AX = CY$ teljesüljön; az AY és CX egyenesek metszéspontját jelölje P. Bizonyítsuk be, hogy a DP egyenes felezi a paralelogramma D-nél levő szögét.

1. megoldás. (1. ábra)



1. ábra



2. ábra

Jelölje a P-ből az AB, BC, CD, DA oldalegyenesekre állított merőleges szakaszok hosszát rendre u, v, x, y, és legyen $AX = CY = c$.

Elegendő megmutatnunk, hogy $x = y$, mert ez azt jelenti, hogy P egyenlő távol van az ADC szög száraitól, tehát rajta van a szög felezőjén. 1 pont

Írjuk fel az APC háromszög kétszeres területét két különböző módon:

$$2t_{APC} = 2t_{AXC} - 2t_{AXP} = c(u + x) - cu = cx,$$ 2 pont

$$2t_{APC} = 2t_{CYA} - 2t_{CYP} = c(v + y) - cv = cy.$$ 2 pont

A területek egyenlősége miatt $cx = cy$, amiből a bizonyítandó $x = y$ következik. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. (2. ábra) A DA egyenest a P-n át AB-vel húzott párhuzamos Q-ban, a CP egyenes pedig S-ben metszi; továbbá: a CD egyenest a P-n át BC-vel húzott párhuzamos R-ben, az AP egyenes pedig T-ben metszi. Vezessük be az $AB = a$, $BC = b$, $PQ = x$, $PR = y$, $SA = u$, $CT = v$ jelöléseket.

Állításunk bizonyítására elegendő megmutatnunk, hogy $x = y$, mert ebben az esetben a $QPRD$ négyszög rombusz, és így a DP átló szögfelező. 1 pont

Alkalmazzuk most kétszer a párhuzamos szelők tételét a DSC szögre:

$$\frac{SA}{SD} = \frac{AX}{DC}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{u}{u+b} = \frac{c}{a}, \qquad \text{ebből:} \qquad u = \frac{bc}{a-c}.$$

$$\frac{SQ}{SD} = \frac{PQ}{DC}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{u+b-y}{u+b} = \frac{x}{a}, \qquad \text{ebből:} \qquad u = \frac{bx+ay-ab}{a-x}.$$

Az u-ra kapott két kifejezés egymással egyenlő:

$$\frac{bc}{a-c}=\frac{bx+ay-ab}{a-x},$$

$$bc(a-x)=(a-c)(bx+ay-ab),$$

(1) $$bx-cy+ay=ab.$$ 3 pont

Ha most a párhuzamos szelők tételét az előzőkhöz hasonlóan a DTA szögre alkalmazzuk, meggondolásainkban az a és b, valamint az x és y szerepet cserélnek; ennek megfelelően (1)-ből azt kapjuk, hogy

(2) $$ay-cx+bx=ab.$$ 2 pont

(1) és (2) megfelelő oldalainak különbségéből

$$cx-cy=0$$

adódik, ami éppen a bizonyítandó $x=y$ egyenlőséget jelenti. 1 pont

Összesen: 7 pont

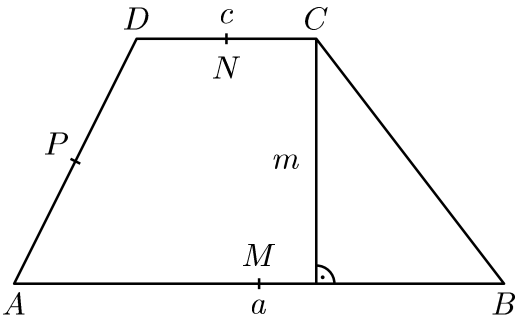
A 2003/2004. tanévi matematika OKTV I. kategória (szakközépiskolások)

első fordulója feladatainak megoldásai

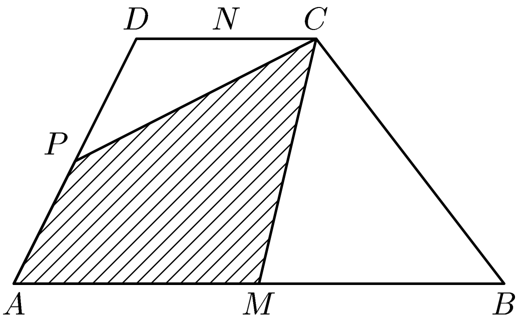
1. feladat.

Az $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai AB és CD. Az AB alap felezőpontja M, a CD alap felezőpontja N, az AD szár felezőpontja P. Határozza meg az $AMCP$ és a $BNDP$ négyszögek területének arányát!

Megoldás. Jelöléseink az 1. ábrán láthatók.



1. ábra



2. ábra

Az $AMCP$ négyszög területének kiszámításához tekintsük a 2. ábrát!

Az ábráról leolvasható, hogy

$$T_{AMCP} = T_{ABCD} - T_{MBC} - T_{CDP}.$$ 1 pont

A szereplő területek a, c, m-ből kiszámíthatók:

$$T_{ABCD} = \frac{a+c}{2} \cdot m,$$

$$T_{MBC} = \frac{a}{2} \cdot m \cdot \frac{1}{2} = \frac{a \cdot m}{4},$$

$$T_{CDP} = c \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{c \cdot m}{4}.$$ 2 pont

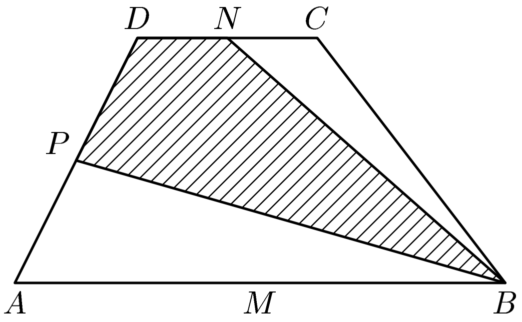
Így:

$$T_{AMCP} = \frac{a \cdot m + c \cdot m}{2} - \frac{a \cdot m}{4} - \frac{c \cdot m}{4},$$

(1) $$T_{AMCP} = \frac{a+c}{4} \cdot m = \frac{T_{ABCD}}{2}.$$ 1 pont

Hasonlóképpen számítjuk a $BNDP$ négyszög területét:

$$T_{BNDP} = T_{ABCD} - T_{CNB} - T_{ABP}.$$ 1 pont



A szereplő területek:

$$T_{ABCD} = \frac{a+c}{2} \cdot m,$$

$$T_{CNB} = \frac{c}{2} \cdot m \cdot \frac{1}{2} = \frac{c \cdot m}{4}.$$

$$T_{ABP} = a \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a \cdot m}{4}.$$ 1 pont

Innen már látható, hogy

(2) $$T_{BNDP} = \frac{a+c}{4} = \frac{T_{ABCD}}{2}.$$ 1 pont

Az (1) és (2) összefüggések együtt azt jelentik, hogy

$$T_{AMCP} = T_{BNDP},$$

vagyis a két négyszög területének aránya 1 : 1. 1 pont

Összesen: 8 pont

2. feladat.

Oldja meg a

$$[\sin x] \cdot \{\sin x\} = \sin x$$

egyenletet, ha x valós szám!

(Az r valós szám esetén $[r]$ – az r egész része – jelöli azt az egész számot, amelyre

$$r - 1 < [r] \leq r.$$

Az r valós szám esetén $\{r\}$ – az r törtrésze – jelöli azt a számot, amelyre

$$\{r\} = r - [r].$$

Megoldás. *a)* Ha $\sin x \in \mathbf{Z}$, akkor $\{\sin x\} = 0$, tehát az egyenlet bal oldala 0, ezért a jobb oldal is 0 kell legyen, vagyis

$$\sin x = 0,$$

amiből

(1) $$x_1 = k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$ 2 pont

b) Ha $0 < \sin x < 1$, akkor $[\sin x] = 0$, vagyis ismét

$$\sin x = 0$$

kellene, hogy teljesüljön, de a feltétel szerint $\sin x > 0$, így ekkor nincs megoldása az egyenletnek. 2 pont

c) Ha pedig $-1 < \sin x < 0$, akkor $[\sin x] = -1$, és $\{\sin x\} = \sin x + 1$, ezért egyenletünk a következő:

$$(-1) \cdot (\sin x + 1) = \sin x,$$

átrendezve

$$\sin x = -\frac{1}{2}.$$

Ennek megoldásai:

(2) $$x_2 = \frac{7 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2\pi, \qquad (n \in \mathbf{Z}),$$

(3) $$x_3 = \frac{11 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2\pi, \qquad (m \in \mathbf{Z}).$$ 3 pont

A megoldás során lépéseink ekvivalensek voltak, ezért az (1), (2) és (3) pont alatti megoldások az eredeti egyenletnek is gyökei. 1 pont

Összesen: 8 pont

Megjegyzés. (2) és (3) összevontan írható $x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi$, $(n \in \mathbf{Z})$ alakban is.

3. feladat.

A valós számok halmazán értelmezett $f(x)$ függvényről tudjuk, hogy

$$f(x) = a \cdot |x+1| + b \cdot |x-1| + c \cdot |x-3|,$$

továbbá

$$f(-2) = 8; \qquad f(2) = -2 \quad \text{és} \quad f(5) = 6.$$

a) Határozza meg az $f(x)$ függvényt!

b) Vázolja a függvény grafikonját a $[-2; 5]$ intervallumban!

c) Adja meg a függvény legkisebb értékét, és azt, hogy ezt a legkisebb értéket a függvény hol veszi fel!

Megoldás. *a)* Az $f(-2) = 8$ feltételből

(1) $$a + 3b + 5c = 8,$$

az $f(2) = -2$ feltételből

(2) $$3a + b + c = -2,$$

az $f(5) = 6$ feltételből

(3) $$6a + 4b + 2c = 6$$

következik. 1 pont

Az (1), (2) és (3) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása:

$$a = -2, \qquad b = 5 \quad \text{és} \quad c = -1.$$ 2 pont

Ezért tehát

$$f(x) = -2 \cdot |x+1| + 5 \cdot |x-1| - |x-3|,$$

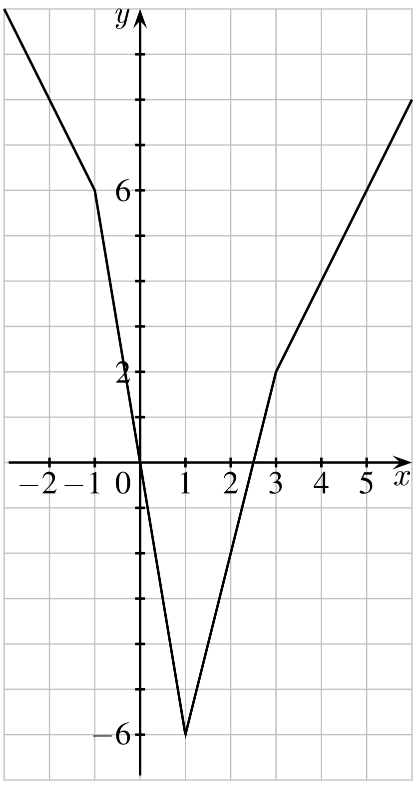
amivel $f(x)$-et meghatároztuk. 1 pont

b) Az $f(x)$ függvény grafikonjának elkészítéséhez felírjuk az egyes intervallumokon a megfelelő lineáris függvényeket. Eredményeinket táblázatba is foglalhatjuk.

x	$]-\infty;-1]$	$[-1;1[$	$[1;3[$	$[3;\infty[$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$	$x+1$
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$	$x-1$
$\lvert x-3\rvert$	$-x+3$	$-x+3$	$-x+3$	$x-3$
$f(x)$	$-2x+4$	$-6x$	$4x-10$	$2x-4$

2 pont

Ennek alapján a grafikon:



2 pont

c) Az $f(x)$ függvény minimumának helye tehát $x=1$, a minimum értéke pedig

$$f(1)=-6.$$

2 pont

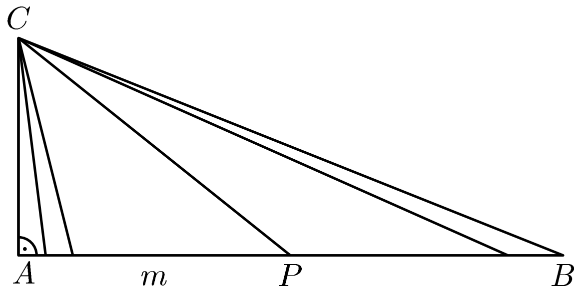
Összesen: 10 pont

Megjegyzések. 1. Ha a versenyző a grafikon lineáris szakaszait leíró képleteket táblázat nélkül adja meg, természetesen akkor is kapja meg az erre a részre járó 2 pontot

2. Ha a versenyző a grafikont néhány pont alapján – a lineáris szakaszokat leíró képletek nélkül – adja meg, akkor csupán 1 pontot kapjon a *b)* részre.

4. feladat.

Felveszünk egy 2003 mm hosszúságú AB szakaszt, majd felosztjuk 2003 egyenlő részre. Ezután az AB szakaszra az A pontjában 8 mm hosszúságú merőleges szakaszt állítunk. Ennek C végpontját összekötjük B-vel és az AB szakasz összes osztópontjával. Az így keletkezett összes háromszög közül melyek azok, amelyekben minden oldal hossza milliméterben mérve egész szám?



Megoldás. Készítsünk vázlatos ábrát!

Válasszuk ki az A és a C pontokat, valamint az egyik osztópontot, P-t, és jelöljük m-mel az AP távolságot.

Az APC háromszög A-ban derékszögű, így oldalaira érvényes a Pitagorasz-tétel. Jelölje a PC átfogó hosszát n (nyilván teljesül, hogy $n > m$). 1 pont

A Pitagorasz-tétel szerint:

$$8^2 + m^2 = n^2,$$

ahonnan

$$64 = n^2 - m^2,$$

$$64 = (n-m) \cdot (n+m) \tag{1}$$

adódik, ahol n és m pozitív egész számok, valamint $n-m$ és $n+m$ is pozitív egészek, és nyilvánvaló, hogy $n-m < n+m$. 1 pont

Ezek szerint fel kell bontanunk 64-et két különböző pozitív egész szám szorzatára.

Ezt a következőképpen tehetjük meg:

$$64 = 1 \cdot 64 = 2 \cdot 32 = 4 \cdot 16.$$ 1 pont

Eszerint három eset lehetséges:

(a) Ha $n-m=1$ és $n+m=64$,

akkor az egyenletrendszerből

$$n = 32{,}5; \qquad m = 31{,}5,$$

mivel ezek nem egészek, ezért a feladatnak nem megoldásai.

(b) Ha $n-m=2$ és $n+m=32$,

akkor az egyenletrendszer megoldása:

$$n = 17 \qquad \text{és} \qquad m = 15,$$

amelyek az összes feltételnek megfelelnek.

(c) Ha $n-m=4$ és $n+m=16$,

akkor az egyenletrendszerből adódik

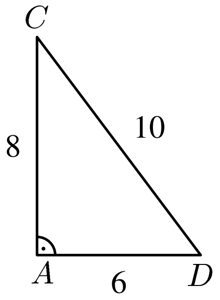
$$n = 10 \qquad \text{és} \qquad m = 6,$$

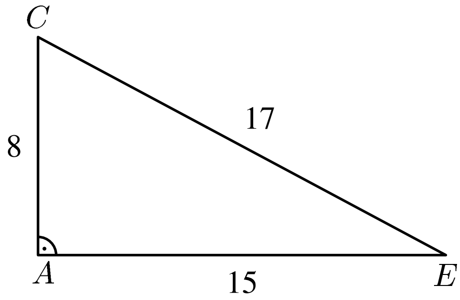
ez a számpár szintén eleget tesz minden feltételnek. 3 pont

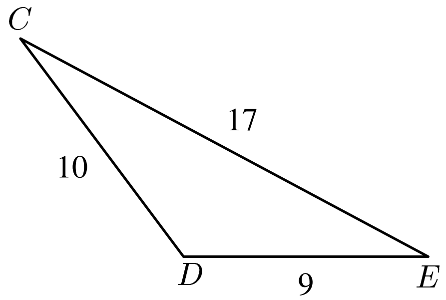
Azt kaptuk tehát, hogy két olyan derékszögű háromszög van, amely megfelel a feladat feltételeinek.

Jelöljük ezután a 6. osztáspontot D-vel, a 15. osztáspontot E-vel!

Az ADC derékszögű háromszög oldalainak hossza 8 mm, 6 mm és 10 mm,
az AEC derékszögű háromszög oldalainak hossza 8 mm, 15 mm és 17 mm. 1 pont







Így azonban a DEC háromszög oldalainak hossza is egész szám lesz, mégpedig $CD = 10$ mm, $CE = 17$ mm, $DE = (15 - 6)$ mm $= 9$ mm. Tehát ez is megoldása a feladatnak 2 pont

A feladat összes feltételének tehát három háromszög felel meg, mégpedig az ADC, az AEC és a DEC háromszög. 1 pont

Összesen: 10 pont

5. feladat.

Határozza meg az összes olyan n pozitív egész számot, amelyre teljesül az, hogy ha egymás után leírjuk n^3 és n^4 tízes számrendszerbeli alakját, akkor a kapott tízjegyű számban mind a tíz számjegy pontosan egyszer fordul elő!

Megoldás. Ha $0 < n < 10$ és $n \in \mathbf{N}$, akkor

$$n^3 < 1000, \text{ tehát } n^3 \text{ legfeljebb 3-jegyű, és}$$

$$n^4 < 10\,000, \text{ így } n^4 \text{ legfeljebb 4-jegyű.}$$

A számokat egymás után leírva így legfeljebb 7-jegyű számot kapnánk, ezért

$$n < 10$$

nem lehet megoldása a feladatnak. 2 pont

Másrészt ha $n^3 > 10^4$ lenne, azaz n^3 legalább 5-jegyű, akkor

$$n > \sqrt[3]{10^4},$$

és így

$$n^4 > \sqrt[3]{10^{16}},$$

vagyis

$$n^4 > 10^5 \cdot \sqrt[3]{10},$$

ami azt jelenti, hogy n^4 legalább 6-jegyű, és ekkor a feladat utasítását követve legalább 11-jegyű számot kapnánk, amelyben legalább egy számjegy legalább kétszer kell szerepeljen (a skatulya-elvnek megfelelően), tehát a feladatnak nem lehet ilyen megoldása. 2 pont

Ezekől következik, hogy n^3 csakis 4-jegyű, és emiatt n^4 csakis 6-jegyű szám lehet, azaz

$$1000 \le n^3 < 10\,000 \tag{1}$$

és

$$100\,000 \le n^4 < 1\,000\,000. \tag{2}$$ 2 pont

Az (1) és (2) alatti egyenlőtlenségekből azt kapjuk, hogy

$$10 \le n \le 21 \qquad \text{és} \qquad 18 \le n \le 31. \tag{3}$$

(Ugyanis $21^3 = 9261 < 10\,000 < 22^3 = 10648,$

valamint $17^4 = 83\,521 < 100\,000 < 18^4 = 104976,$

és $31^4 = 923\,521 < 1\,000\,000 < 32^4 = 1\,048\,576.$) 2 pont

A (3) alatti feltételeket összevetve:

$$18 \le n \le 21, \tag{4}$$

ami azt jelenti, hogy n csak a

18, 19, 20, 21

számok közül kerülhet ki. 1 pont

Figyelembe vehetjük még, hogy a tíz egymás mellé írt számjegy összege mindenképpen osztható kell, legyen 9-cel. Ebből következik, hogy $n = 19$ és $n = 20$ nem lehetséges. *1 pont

Az $n = 18$ és az $n = 21$ számokra elvégezve a számolást, látjuk, hogy $n = 21$ nem felel meg a feltételeknek (a 9 261 194 481 tízjegyű számot kapnánk), de $n = 18$ igen, ekkor a $18^3 = 5832$ és a $18^4 = 104\,976$ számokat egymás mellé írva valóban olyan tízjegyű számot fogunk kapni, amelyik mind a tíz számjegyet pontosan egyszer tartalmazza (ez a szám a 5 832 104 976). 2 pont

---

Összesen: 12 pont

Megjegyzés. A *-gal jelzett 1 pontot akkor is kapja meg a versenyző, ha más módon zárja ki a 19 és a 20 számokat.

6. feladat.

Egy előadáson 50 személy vett részt. Tudjuk, hogy bármely négy résztvevő között van olyan, aki a másik három személy mindegyikével találkozott már korábban. Bizonyítsa be, hogy bármely négy résztvevő között van olyan személy, aki korábban már mindegyik résztvevővel találkozott!

Megoldás.

Feltételezhetjük, hogy van a hallgatóság között két olyan személy (nevezzük őket A-nak és B-nek), akik korábban még nem találkoztak.

Ha ugyanis ilyen hallgatópár nem létezne, akkor bármelyik hallgató megfelelne a feladat követelményének. 3 pont

Ha az A–B páron kívül nincs olyan pár, amelynek tagjai korábban nem találkoztak, akkor A-n és B-n kívül bármelyik hallgató megfelel a feltételnek. 3 pont

Tegyük fel ezért, hogy létezik egy, az A–B-től különböző pár, amelynek tagjai korábban még nem találkoztak. Ebben a párban azonban szerepelnie kell vagy A-nak, vagy B-nek, ellenkező esetben az A–B és egy ezektől különböző C–D pár olyan négyest alkotna, amelyben A, B, C, D közül egyik sem találkozott volna korábban mindhárom másik résztvevővel, így ezekre nem teljesülne a feladat feltétele. 3 pont

Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy A–B mellett még A–C az a pár, amelynek tagjai, vagyis A és C korábban még nem találkoztak.

Vegyünk most hozzá az A, B, C hármashoz negyediknek egy D-vel jelölt résztvevőt!

Azt állítjuk, hogy D olyan személy, aki korábban minden hallgatóval találkozott.

Az előzőek alapján ugyanis az A, B, C, D négyesből csak D lehet az, aki korábban találkozott mindhárom másik hallgatóval.

Ezért, ha most C helyébe bármelyik, X-szel jelölt hallgatót írjuk, akkor a feltétel szerint vagy X, vagy D az a személy, aki korábban már találkozott a másik hárommal (A és B nyilván nem lehet).

Ez azonban azt jelenti, hogy D találkozott már X-szel (a találkozás kölcsönös!).

Eszerint D valóban találkozott mindenkivel.

Ebből pedig következik a feladat állítása.

Ha ugyanis az 50 fős hallgatóságból kiválasztunk négy főt úgy, hogy a kiválasztottak között nem szerepel A, B, C egyike sem, akkor az állítás a fentieknek megfelelően nyilvánvaló.

Ha viszont A, B, C valamelyike (vagy akár mindegyikük) szerepel a kiválasztott négyesben, a társaság negyedik tagja (D-hez hasonlóan) akkor is ismer mindenkit az 50 fős hallgatóságból.

Ezzel a bizonyítást befejeztük. 3 pont

Összesen: 12 pont

Megjegyzés. A feladat állítása általánosítható úgy, hogy az 50 fős hallgatóságból bizonyíthatóan van legalább 47 fő olyan, aki az összes többi hallgatóval már találkozott.

Az a versenyző, aki ezt az általánosítást bizonyítja, kapjon 2 jutalompontot.