Gimnázium

A 2003/2004-es tanév matematika OKTV II. kategória első (iskolai) fordulójának feladatai

1. feladat.
A táblára felírtuk a 0-tól 2003-ig terjedő egész számokat (tehát összesen 2004 db számot). Mekkora a táblán levő számjegyek összege?

2. feladat.
Határozzuk meg azokat a valós számokat, amelyek kielégítik a következő egyenletrendszert:

$$\lg(x-y)+\lg 2=\frac{1}{2}(\lg x-\lg y),$$
$$\lg(x+y)-\lg 3=\frac{1}{2}(\lg y-\lg x).$$

3. feladat.
Az a_1, a_2, $\ldots$, a_{80} nyolcvantagú sorozatban a tagok pozitívak, az első és utolsó tagon kívül minden tag egyenlő két szomszédjának a szorzatával. Az első 40 tag szorzata 8, ugyanennyi mind a 80 tag szorzata is. Írjuk fel a sorozat első 8 tagját.

4. feladat.
Kivágtuk papírból a 72 cm^2 területű $ABCD$ téglalapot, majd összehajtottuk úgy, hogy a C csúcs éppen az A csúcsot fedje. Az összehajtott papírlap pontosan egy olyan ötszög alakját veszi fel, amelynek a területe a téglalap területének a 68,75%-a. Mekkorák az $ABCD$ téglalap oldalai?

5. feladat.
Az $ABCD$ paralelogramma AB oldalán úgy jelöljük ki az X és a BC oldalán az Y pontot, hogy $AX=CY$ teljesüljön; az AY és CX egyenesek metszéspontját jelölje P. Bizonyítsuk be, hogy a DP egyenes felezi a paralelogramma D-nél levő szögét.

Szakközépiskola

A 2003/2004-es tanév matematika OKTV I. kategória (szakközépiskolások) első fordulójának feladatai

1. feladat.

Az $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai AB és CD. Az AB alap felezőpontja M, a CD alap felezőpontja N, az AD szár felezőpontja P. Határozza meg az $AMCP$ és a $BNDP$ négyszögek területének arányát!

2. feladat.

Oldja meg a

$$[\sin x] \cdot \{\sin x\} = \sin x$$

egyenletet, ha x valós szám!

(Az r valós szám esetén $[r]$ – az r egész része – jelöli azt az egész számot, amelyre

$$r - 1 < [r] \leq r.$$

Az r valós szám esetén $\{r\}$ – az r törtrésze – jelöli azt a számot, amelyre

$$\{r\} = r - [r].$$

3. feladat.

A valós számok halmazán értelmezett $f(x)$ függvényről tudjuk, hogy

$$f(x) = a \cdot |x+1| + b \cdot |x-1| + c \cdot |x-3|,$$

továbbá

$$f(-2) = 8; \qquad f(2) = -2 \quad \text{és} \quad f(5) = 6.$$

a) Határozza meg az $f(x)$ függvényt!

b) Vázolja a függvény grafikonját a $[-2; 5]$ intervallumban!

c) Adja meg a függvény legkisebb értékét, és azt, hogy ezt a legkisebb értéket a függvény hol veszi fel!

4. feladat.

Felveszünk egy 2003 mm hosszúságú AB szakaszt, majd felosztjuk 2003 egyenlő részre. Ezután az AB szakaszra az A pontjában 8 mm hosszúságú merőleges szakaszt állítunk. Ennek C végpontját összekötjük B-vel és az AB szakasz összes osztópontjával. Az így keletkezett összes háromszög közül melyek azok, amelyekben minden oldal hossza milliméterben mérve egész szám?

5. feladat.

Határozza meg az összes olyan n pozitív egész számot, amelyre teljesül az, hogy ha egymás után leírjuk n^3 és n^4 tízes számrendszerbeli alakját, akkor a kapott tízjegyű számban mind a tíz számjegy pontosan egyszer fordul elő!

6. feladat.

Egy előadáson 50 személy vett részt. Tudjuk, hogy bármely négy résztvevő között van olyan, aki a másik három személy mindegyikével találkozott már korábban. Bizonyítsa be, hogy bármely négy résztvevő között van olyan személy, aki korábban már mindegyik résztvevővel találkozott!