Kiss Árpád
Országos Közoktatási
Szolgáltató Intézmény

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2003–2004-es tanév

első (iskolai) forduló

haladók – I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Az első n pozitív egész szám összege egy olyan háromjegyű szám, amelynek minden jegye egyenlő. Mekkora n értéke?

Megoldás.
Az első n pozitív egész szám összege:

$$\frac{1}{2}n(n+1).$$ 1 pont

Olyan háromjegyű szám, amelynek jegyei egyenlők, $111 \cdot x$, azaz $3 \cdot 37 \cdot x$ alakban írható, ahol x 1 és 9 közötti egész szám. 1 pont

A feltétel szerint

$$\frac{1}{2}n(n+1) = 3 \cdot 37 \cdot x.$$

Mivel 37 prímszám, a számelmélet alaptétele szerint $37 \mid n$ vagy $37 \mid n+1$. 1 pont

Mivel $\frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 46 > 1000$, csak az $n = 37$ vagy $n+1 = 37$ eset lehetséges. 1 pont

De ha $n = 37$, akkor $\frac{1}{2} \cdot 37 \cdot 38$ nem osztható 3-mal. 1 pont

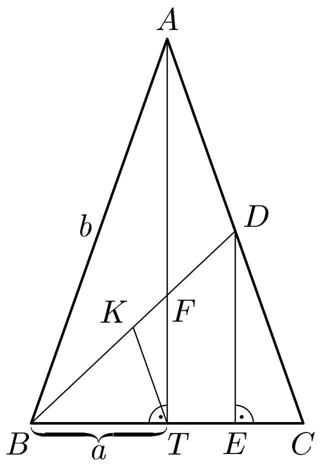
Így $n+1 = 37$, azaz $n = 36$ lehet csak. 1 pont

Ekkor $\frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 37 = 666$ megfelel a feltételnek. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Mekkora az oldalak aránya abban az egyenlő szárú háromszögben, amelyben az alap egyik csúcsán átmenő egyenes felezi a háromszög kerületét és a háromszög alaphoz tartozó magasságát is?

1. megoldás. Legyen $BT = TC = a$ és $AB = AC = b$.



Az ábra jelöléseit használva az $AT=m$, $DE=y$, $CE=x$ jelölésekkel a CDE és a CAT háromszög középpontos hasonlósága alapján

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{m}=\frac{b-a}{b},$$

mert a BD kerületfelező szakasz az AC oldalt $AD=a$ és $CD=b-a$ hosszú szakaszokra osztja. 1 pont

A felírt összefüggésekből $y=\dfrac{m(b-a)}{b}$, $x=\dfrac{a(b-a)}{b}$, illetve $BE=2a-x=\dfrac{a(a+b)}{b}$ adódik. 2 pont

A BED és a BTF háromszögek hasonlóságából

$$\frac{TF}{ED}=\frac{BT}{BE}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{m}{2y}=\frac{b}{a+b}$$ 2 pont

következik, ahonnan az $y=\dfrac{m(b-a)}{b}$ helyettesítéssel $\dfrac{b}{2(b-a)}=\dfrac{b}{a+b}$ adódik.

Egyenletünk alapján $b=3a$. 1 pont

Tehát a háromszög oldalainak aránya:

$$AB:BC:CA=3:2:3.$$ 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Az 1. megoldás ábráját használva húzzunk párhuzamost a T ponton keresztül az AC oldallal! Legyen a párhuzamos egyenes és a BD szakasz metszéspontja K – ábránknak megfelelően.

AC és KT párhuzamossága miatt az FKT és az FDA háromszög tükrös az F pontra, hiszen F az AT magasság felezőpontja. 2 pont

Viszont a BTK és a BCD háromszög középpontosan hasonló a B pontra, ahol a hasonlóság aránya $2:1$, 1 pont

így a $KF=FD=u$ jelöléssel $BK=2u$. 1 pont

Mivel a kerületfelezés miatt $AD=a$ és $DC=b-a$, ezért a BTK és a BCD háromszög hasonlósága alapján a $KT=DA=a$ összefüggést felhasználva 1 pont

$$\frac{b-a}{a}=\frac{4u}{2u}=2, \qquad \text{ahonnan} \qquad b=3a.$$ 1 pont

Az oldalak aránya így: $AB:BC:CA=3:2:3$. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Hány darab pozitív egészekből álló $(k; n)$ számpárra igaz, hogy $\sqrt{n+k}+\sqrt{n-k}>k$ és $k^2+n^2<100$?

Megoldás. A $\sqrt{n+k}+\sqrt{n-k}>k$ egyenlőtlenség $n \geqslant k$ esetén értelmezhető. 1 pont

Mivel

$$\sqrt{n+k}+\sqrt{n-k}=\frac{2k}{\sqrt{n+k}-\sqrt{n-k}},$$ 1 pont

ezért az egyenlőtlenség $2>\sqrt{n+k}-\sqrt{n-k}$ alakra hozható.

Rendezéssel és négyzetre emeléssel $(2+\sqrt{n-k})^2>n+k$ adódik, ahonnan $2\cdot\sqrt{n-k}>$ $>k-2$. 1 pont

Ha $k=1$, akkor a kapott egyenlőtlenség $1+n^2<100$ alapján $n=1, 2, 3, \ldots, 9$-re teljesül. 1 pont

Ha viszont $k>1$, akkor négyzetre emelhetünk:

$$4(n-k)>(k-2)^2, \qquad \text{így} \qquad n>\frac{k^2+4}{4}.$$

A k szám értéke legfeljebb 5 lehet, mert $k=6$-ra már $n>10$ adódik, ami $k^2+n^2<100$ miatt lehetetlen. 1 pont

Így tehát $k=2$ esetén $3 \leqslant n \leqslant 9$,

$k=3$ esetén $4 \leqslant n \leqslant 9$,

$k=4$ esetén $6 \leqslant n \leqslant 9$,

$k=5$ esetén $n=8$. 1 pont

A megfelelő $(k; n)$ számpárok száma így

$$9+7+6+4+1=27.$$ 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Az $x^2+x+p=0$ egyenlet két különböző valós gyöke x_1 és x_2, ahol p pozitív valós paraméter.

Bizonyítsuk be, hogy $\dfrac{x_1^3+x_2^3}{x_1^4+x_2^4}$ nagyobb (-2)-nél, de kisebb (-1)-nél.

Megoldás. Az egyenletnek $p<\dfrac{1}{4}$ esetén van két különböző valós gyöke. 1 pont

Mivel ekkor $x_1+x_2=-1$ és $x_1x_2=p$, ezért az

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$$

azonosság alapján

$$x_1^3+x_2^3=-1-3p(-1)=3p-1.$$ 1 pont

Az

$$x_1^4+x_2^4=\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-2x_1^2x_2^2=\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]^2-2x_1^2x_2^2$$

azonosság szerint pedig

$$x_1^4 + x_2^4 = (1-2p)^2 - 2p^2 = 2p^2 - 4p + 1. \qquad \text{1 pont}$$

Bizonyítandó, hogy $-2 < \dfrac{3p-1}{2p^2-4p+1} < -1$.

Felhasználva, hogy $p < \dfrac{1}{4}$ esetén $2p^2 - 4p + 1 > 0$, a nevezővel való szorzás és rendezés után a

$$0 < 4p^2 - 5p + 1 \qquad \text{és a} \qquad 0 < -2p^2 + p$$

egyenlőtlenségek adódnak. 1 pont

Az első egyenlőtlenség ekvivalens módon átalakított alakja:

$$0 < 4(p-1)\left(p - \frac{1}{4}\right),$$

ami $0 < p < \dfrac{1}{4}$ esetén nyilvánvalóan teljesül. 2 pont

A második egyenlőtlenség $0 < p(1-2p)$ alakjából leolvasható, hogy $0 < p < \dfrac{1}{4}$ esetén az egyenlőtlenség mindig teljesül.

Ezzel pedig állításunkat igazoltuk. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Egy osztályba 20 diák jár. Tudjuk, hogy bármely két diáknak van közös nagyapja. (Minden diáknak két nagyapja van.) Bizonyítsuk be, hogy van köztük 14 olyan tanuló, akiknek közös nagyapja van!

Megoldás. Azt a diákot, akinek két nagyapja A és B, jelöljük (A,B)-vel! Több ilyen diák is lehet. Feltehetjük, hogy a 20 diáknak nincs közös nagyapja, különben nincs mit bizonyítani. 1 pont

Létezik tehát legalább egy diák, akinek B nem nagyapja. Legyen ő (A,C)! Hasonló módon van olyan diák, akinek A nem nagyapja. Ő csak (B,C) lehet, hiszen (A,B)-vel és (A,C)-vel is van közös nagyapja. 2 pont

Tehát mindenki (A,B), (A,C) vagy (B,C), jelöljük a megfelelő típusú diákok számát n_1, n_2, n_3-mal! Ekkor $n_1 + n_2 + n_3 = 20$. 1 pont

A közös nagyapja $n_1 + n_2$ diáknak, B $n_1 + n_3$-nak, C $n_2 + n_3$-nak. 1 pont

Ha legfeljebb 13 diáknak volna közös nagyapja, akkor innen

$$40 = 2(n_1 + n_2 + n_3) = (n_1 + n_2) + (n_1 + n_3) + (n_2 + n_3) \leqslant 3 \cdot 13 = 39,$$

ami nem lehetséges. 2 pont

Tehát van legalább 14 diák, akiknek van közös nagyapjuk.

Összesen: 7 pont

Kiss Árpád
Országos Közoktatási
Szolgáltató Intézmény

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2003–2004-es tanév

első (iskolai) forduló

haladók – II. kategória
(nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók)

Megoldások és javítási útmutató

1. Bizonyítsuk be, hogy

a) $2003^{2004}+2004^{2003}$ nem prímszám,

b) $2003^{2004}-2004^{2003}$ nem négyzetszám.

Megoldás. *a)* Egy 3-ra végződő szám negyedik hatványa 1-re végződik, így a $2003^{2004}=$ $=\left(2003^4\right)^{501}$ összefüggés alapján 2003^{2004} utolsó számjegye 1. 1 pont

A 4-re végződő számok páros kitevőjű hatványainak utolsó számjegye 6, ezért $2004^{2003}=$ $=2004^{2002}\cdot 2004$ szerint 2004^{2003} utolsó számjegye 4. 1 pont

Ekkor pedig $2003^{2004}+2004^{2003}$ utolsó számjegye: $1+4=5$, ami azt jelenti, hogy $2003^{2004}+2004^{2003}$ osztható 5-tel, de 5-nél nyilvánvalóan nagyobb, azaz valóban nem prímszám. 2 pont

b) Az *a)* feladat megoldása alapján 2003^{2004} utolsó számjegye 1, 2004^{2003} utolsó számjegye pedig 4, ezért a $2003^{2004}-2004^{2003}$ szám utolsó számjegye 7. A 7 öttel osztva 2 maradékot ad, így a $2003^{2004}-2004^{2003}$ szám 5-ös maradéka is 2. 1 pont

Viszont egy négyzetszám 5-ös maradéka csak 0, 1, 4 lehet, ezért az adott szám nem lehet négyzetszám. 2 pont

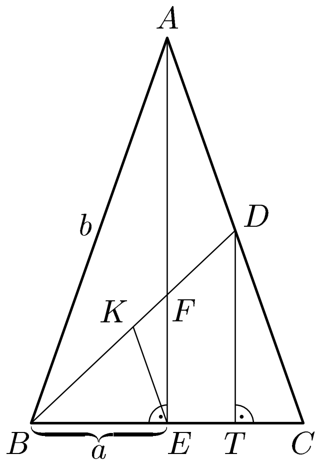
Összesen: 7 pont

Megjegyzés. A négyzetszámok 10-es maradéka csak 0, 1, 4, 5, 6, 9 lehet, vagyis egy négyzetszám utolsó számjegye nem lehet 7. (A *b)* rész így is lehet $2+1$ pont értékű.)

2. Egy egyenlő szárú háromszög alapjának egyik csúcsán átmenő egyenes felezi a háromszög kerületét és a háromszög alaphoz tartozó magasságát is. Milyen arányban osztja a háromszög alaphoz tartozó magassága a kerületet felező egyenes háromszögbe eső szakaszát?

1. megoldás. Tekintsük a következő ábrát:

Legyen $BE = CE = a$ és $AB = AC = b$, továbbá $AE = m$, $DT = y$, $CT = x$.



A jelölések alapján a CTD és a CEA háromszög középpontos hasonlósága alapján $\frac{x}{a} = \frac{y}{m} = \frac{b-a}{b}$, mert a BD kerületfelező szakasz az AC oldalt $AD = a$, $CD = b - a$ hosszú szakaszokra osztja. 1 pont

A felírt összefüggésekből $y = \frac{m \cdot (b-a)}{b}$, $x = \frac{a(b-a)}{b}$, illetve $BT = 2a - x = \frac{a(a-b)}{b}$ adódik. 2 pont

A BTD és a BEF háromszögek középpontos hasonlóságából $\frac{EF}{TD} = \frac{BE}{BT}$, azaz $\frac{m}{2y} = \frac{b}{a+b}$ következik, ahonnan az $y = \frac{m(b-a)}{b}$ helyettesítéssel $\frac{b}{2(b-a)} = \frac{b}{a+b}$ adódik.

Egyenletünk alapján $b = 3a$. 2 pont

A CBD szögre a párhuzamos szelők tételét alkalmazva

$$\frac{BF}{FD} = \frac{BE}{ET} = \frac{a}{a-x} = \frac{a}{\frac{a^2}{b}} = \frac{b}{a} = 3.$$ 1 pont

Tehát az alaphoz tartozó magasság a kerületfelező szakaszt $BF : FD = 3 : 1$ arányban osztja. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Az 1. megoldás ábráját használva húzzunk párhuzamost az E ponton keresztül az AC oldallal! Legyen a párhuzamos és a BD szakasz metszéspontja K – ábránknak megfelelően.

AC és KE párhuzamossága miatt az FKE és az FDA háromszög tükrös az F pontra, hiszen F az AE magasság felezőpontja. 2 pont

Legyen $KF = FD = u$!

A BEK és a BCD háromszög $1 : 2$ arányban hasonló a B centrumra nézve, 1 pont

ezért $BK = 2u$, hiszen $\frac{BK}{BD} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$, azaz $\frac{BK}{BK + 2u} = \frac{1}{2}$, ahonnan $BK = 2u$. 2 pont

(Mivel a kerületfelezés miatt $AD = a$ és $DC = b - a$, ezért a BEK és a BCD háromszög hasonlóságából a $KE = DA = a$ összefüggés alapján $\frac{DC}{KE} = \frac{BD}{BK}$ következik, azaz $\frac{b-a}{a} = \frac{4u}{2u} = 2$, így $b = 3a$.)

A kérdéses osztási arány, $\frac{BF}{FD}$ értéke így $\frac{3u}{u} = 3$. 2 pont

Összesen: 7 pont

3. Bizonyítsuk be, hogy ha az $x^2+px+q=0$ egyenletnek két olyan valós gyöke van, amelyek közül az egyik a $[0;1]$ intervallum belsejébe, a másik pedig az intervallumon kívül van (ahol p és q valós paraméter), akkor az

$$(1+p+q)x^2+(1+2p+3q)x+2q=0$$

egyenletnek pontosan egy pozitív gyöke van.

Megoldás. A megadott feltételek azt jelentik, hogy $x \in \mathbf{R}$ esetén az $f(x)=x^2+px+q$ függvény az $x=0$ és az $x=1$ helyen ellenkező előjelű.

A két lehetséges esetért: 2 pont

Mivel $f(0)=q$ és $f(1)=1+p+q$, ezért

$$q(1+p+q)<0.$$ 1 pont

Az $(1+p+q)x^2+(1+2p+3q)x+2q=0$ egyenlet biztosan másodfokú, hiszen $1+p+q \neq 0$. 1 pont

Az egyenlet diszkriminánsa: $(1+2p+3q)^2-8q(1+p+q)$ biztosan pozitív $q(1+p+q)<0$ miatt, így az egyenletnek két különböző gyöke van. 1 pont

A gyökökre a Viète-formulák szerint $x_1x_2=\dfrac{2q}{1+p+q}$ teljesül. 1 pont

Mivel $q(1+p+q)<0$, így $\dfrac{q}{1+p+q}$ is negatív, természetesen ekkor $\dfrac{2q}{1+p+q}<0$.

Ez pedig azt jelenti, hogy az x_1 és x_2 gyök közül pontosan az egyik pozitív. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Legyen a, b, c és d négy pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy

$$[(a;c);(b;d)] \leqslant ([a;b];[c;d]),$$

ahol $(x;y)$ – a szokásos módon – az x és y egészek legnagyobb közös osztóját, $[x;y]$ pedig a legkisebb közös többszörösét jelöli.

Megoldás. $(a;c)$ osztója a-nak, ami osztója $[a;b]$-nek, tehát $(a;c)$ osztója $[a;b]$-nek. 1 pont

$(a;c)$ c-nek is osztója, ami osztója $[c;d]$-nek, tehát $(a;c)$ osztója $[c;d]$-nek is. 1 pont

$(a;c)$ így osztja $[a;b]$ és $[c;d]$ legnagyobb közös osztóját, $([a;b];[c;d])$-t. 1 pont

Hasonlóan: $(d;b)$ is osztja $([a;b];[c;d])$-t. 2 pont

Mivel $(a;c)$ is és $(b;d)$ is osztója $([a;b];[c;d])$-nek, így legkisebb közös többszörösük is. 1 pont

Vagyis $[(a;c);(b;d)]$ osztja $([a;b];[c;d])$-t, így az egyenlőtlenség is nyilván teljesül. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Egy osztályba 20 diák jár. Tudjuk, hogy bármely két diáknak van közös nagyapja. (Minden diáknak két nagyapja van.) Bizonyítsuk be, hogy van köztük 14 olyan tanuló, akiknek közös nagyapja van!

Megoldás. Azt a diákot, akinek két nagyapja A és B, jelöljük (A,B)-vel! Több ilyen diák is lehet. Feltehetjük, hogy a 20 diáknak nincs közös nagyapja, különben nincs mit bizonyítani. 1 pont

Létezik tehát legalább egy diák, akinek B nem nagyapja. Legyen ő (A,C)! Hasonló módon van olyan diák, akinek A nem nagyapja. Ő csak (B,C) lehet, hiszen (A,B)-vel és (A,C)-vel is van közös nagyapja. 2 pont

Tehát mindenki (A,B), (A,C) vagy (B,C), jelöljük a megfelelő típusú diákok számát n_1, n_2, n_3-mal! Ekkor $n_1+n_2+n_3=20$. 1 pont

A közös nagyapja n_1+n_2 diáknak, B n_1+n_3-nak, C n_2+n_3-nak. 1 pont

Ha legfeljebb 13 diáknak volna közös nagyapja, akkor innen

$$40=2(n_1+n_2+n_3)=(n_1+n_2)+(n_1+n_3)+(n_2+n_3)\leqslant 3\cdot 13=39,$$

ami nem lehetséges. 2 pont

Tehát van legalább 14 diák, akiknek van közös nagyapjuk.

Összesen: 7 pont