Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2007/2008-as tanév
2. forduló
haladók II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Hány olyan pozitív egész számokból álló $(x; y)$ számpár van, amelyre $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2008}$ teljesül?

Megoldás. Az egyenlet törtmentes alakja: $2008y - 2008x = xy$, ahonnan $y = \frac{2008x}{2008 - x}$. 1 pont

Mivel
$$\frac{2008x}{2008 - x} = \frac{2008(x - 2008) + 2008^2}{2008 - x} = -2008 + \frac{2008^2}{2008 - x},$$
ezért $(2008 - x)(2008 + y) = 2008^2$. 1 pont

2008 prímtényezős felbontása: $2008 = 2^3 \cdot 251$, így a kapott egyenlet alakja:
$$(2008 - x)(2008 + y) = 2^6 \cdot 251^2,$$
ahol 251 prímszám. 1 pont

Két egész szám különbsége és összege egyszerre páratlan vagy páros, mivel pedig 2008^2 páros szám, ezért $2008 - x$ és $2008 + y$ is az. 1 pont

Továbbá $0 < 2008 - x < 2008 + y < 2008^2$, ezért $2008 - x$ értéke csak 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, $2 \cdot 251$, $2^2 \cdot 251$ lehet. 2 pont

A kapott felbontásból adódó x és y pozitív számokból kapható $(x; y)$ számpárok mindegyike kielégíti az eredeti egyenletet, így összesen hét megoldása van egyenletünknek. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Ha $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{\sqrt[6]{x}}$, akkor igazoljuk, hogy $x + \frac{1}{x}$ egész szám.

Megoldás. Legyen $\sqrt[6]{x} = y$, ahol $y > 0$.

Ekkor $\sqrt[3]{x} = y^2$ és $\sqrt{x} = y^3$ alapján $\frac{1}{y^3} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{y}$, azaz $y^2 - y - 1 = 0$. 1 pont

A megoldóképlet szerint az $y > 0$ feltétel alapján $y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. 1 pont

Így pedig $x = y^6$ alapján $x = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6 = \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3\right)^2$.

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}}{8} = 2+\sqrt{5}.$$ 1 pont

Tehát $x = y^6 = \left(2+\sqrt{5}\right)^2 = 9+4\sqrt{5}$. 1 pont

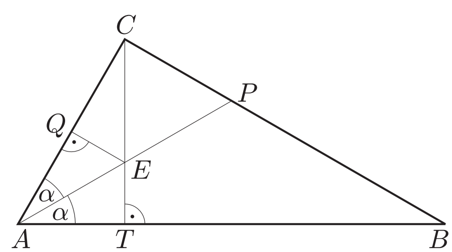
Ezek alapján $x + \frac{1}{x} = 9+4\sqrt{5} + \frac{1}{9+4\sqrt{5}}$. 1 pont

A tört nevezőjének gyöktelenítésével $x + \frac{1}{x} = 9+4\sqrt{5}+9-4\sqrt{5} = 18$ adódik, 1 pont
ami valóban egész szám. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Az ABC háromszög A csúcsból húzott belső szögfelezője a BC oldalt P-ben metszi. A C csúcsból induló CT magasság az E pontban felezi az AP szakaszt. Bizonyítsuk be, hogy ha a PCE háromszög területe kétszerese az ATE háromszög területének, akkor az ABC háromszög derékszögű.

Megoldás. Tekintsük a következő ábrát:



Az ATE háromszög területét t-vel jelölve a PCE háromszög területe $2t$.

Az E pontból az AC oldalra állított merőleges szakasz EQ hossza megegyezik az ET szakasz hosszával, hiszen E az A csúcsból induló belső szögfelező. Tehát $ET = EQ$. 1 pont

Az AEC háromszög területe megegyezik a PCE háromszög területével, mert a háromszögekben $AE = EP$, és a két háromszög C csúcsból húzott magassága közös. Így az AEC háromszög területe is $2t$. 1 pont

Tehát az AEC és ATE háromszög területének aránya 2 : 1.

A két háromszögnek azonos hosszú egy-egy magassága ($ET = EQ$), ezért a magasságokhoz tartozó oldalak aránya is 2 : 1. Ennek megfelelően $AC = 2AT$. 1 pont

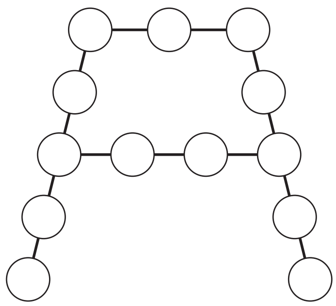
Az ATC derékszögű háromszögben az átfogó kétszerese az AT befogónak, azaz az ATC háromszög egy szabályos háromszög fele. 1 pont

Az ábra szerinti 2α szög ekkor 60°, ekkor pedig $ACT\sphericalangle = 30^\circ$. Az AEC háromszögben így $CAE\sphericalangle = ACE\sphericalangle = \alpha = 30^\circ$. Az ACE háromszög tehát egyenlő szárú. 1 pont

Igaz továbbá, hogy $EC = AE = EP$ a feltételek szerint. 1 pont

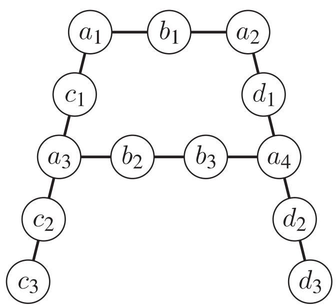
Ez pedig azt jelenti, hogy az AP szakasz Thalész-körén rajta van a C csúcs, azaz az ABC háromszög derékszögű. 1 pont

Összesen: 7 pont



4. A 34 éves ADONISZ áruházlánc születésnapi ajándékként vásárláskor vevőinek minden 100 forintos tétel után egy olyan sorsjegyet ad, amelyen az áruház emblémája látható. Ha a vevő be tudja írni a körökbe a számokat 1-től 13-ig úgy, hogy minden szám pontosan egyszer szerepeljen, és a beírt számok összege minden egyenes vonal mentén 34 legyen, akkor a sorsjegy részt vesz a sorsoláson. Egy vevő több sorsjegyet is leadhat, de két sorsjegyet nem tölthet ki azonos módon. Legalább hány forintért vásárolt az a vevő, aki a legnagyobb esélyt akarja biztosítani magának, azaz az összes lehetséges módon kitöltötte a sorsjegyeket?

Megoldás.



Nevezzük a szárak metszéspontjaiban lévő számokat a_i számoknak, a vízszintes szárakon maradókat b_i számoknak, a bal, illetve jobb oldali száron maradókat c_i, illetve d_i számoknak.

A négy egyenes vonalon lévő számok összege az a_i számok összegével nagyobb az $1 + 2 + \ldots + 13$ összegnél, hiszen ezeket a számokat számoltuk kétszer. Így az a számok összege: $4 \cdot 34 - 91 = 45$.

Mivel a legnagyobb négy szám összege: $13 + 12 + 11 + 10 = 46$, így az a_i számok csak a 13, 12, 11, 9 lehetnek. Ekkor a b_i számok összege $2 \cdot 34 - 45 = 23$. 1 pont

A 13-asnak mindenképpen a felső sorban kell lennie, mert ellenkező esetben az összeg legfeljebb $12 + 11 + 10 = 33$ lehetne. A másik a szám ebben a sorban a 11 lehet csak, mert a másik kettő középre is a számot igényel. Ekkor a középső (b_1) szám a 10. Legyen például a 13-as a bal felső sarokban, és ekkor az így kapott lehetőségek kétszerese adja az összes lehetőséget. 1 pont

A középső sorban lévő b_2, b_3 számok összege: $34 - 12 - 9 = 13$, ekkor a b_2, b_3 számok 8 és 5, vagy 7 és 6 lehetnek. Ekkor a középső sorra négy olyan lehetőség adódik, ami a szárakon lévő c_i és d_i számokat befolyásolja. (Természetesen a végeredmény megadásánál figyelembe kell venni, hogy a két b szám kétféle sorrendben írható be az ábrába.) Ez a négy lehetőség:

(1) 12, 8, 5, 9; (2) 12, 7, 6, 9; (3) 9, 8, 5, 12; (4) 9, 7, 6, 12. 1 pont

Ezután már elég a bal oldali száron biztosítani, hogy a számok összege 34 legyen, hiszen ekkor a jobb oldali száron is ennyi az összeg. A c_i számként alkalmas számhármasok a sorrendtől eltekintve a következők:

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad 34-(13+12)=9=6+2+1 &&(2)\quad 9=5+3+1\\
&=4+3+2 &&=4+3+2\\[1ex]
&(3)\quad 34-(13+9)=12=7+4+1 &&(4)\quad 12=8+3+1\\
&=7+3+2 &&=5+4+3\\
&=6+4+2
\end{aligned}
$$

2 pont

Ha a bal szár 9 darab lehetséges megoldástípusából egyet kiválasztunk, az 6-féleképpen írható be a körökbe. A maradék d_i számok szintén 6-féleképpen írhatók be a maradék helyekre és vegyük figyelembe, hogy a középső sorban a b_2, b_3 számokra 2 lehetőség van, ez összesen: $6 \cdot 6 \cdot 2 = 72$ lehetőség. 1 pont

Vagyis összesen $2 \cdot 9 \cdot 72 = 1296$ kitöltés lehetséges, tehát a vásárlónak legalább 129 600 Ft-ért kellett vásárolnia. 1 pont

Összesen: 7 pont