Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási Minisztérium
Alapkezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2005/2006-os tanév
2. forduló
haladók II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Határozza meg az a, b, c egészek értékét úgy, hogy a következő egyenlőség minden valós x-re teljesüljön:

$$(x-a)\cdot(x-10)+1=(x+b)\cdot(x+c).$$

Megoldás.

$$(x-a)\cdot(x-10)+1=(x+b)\cdot(x+c)$$
$$x^2-(a+10)\cdot x+1+10a=x^2+(b+c)\cdot x+bc.$$

Minden valós x-re igaz az egyenlőség, ezért $x=0$-ra is. Az $x=0$-t behelyettesítve:

$$1+10a=bc. \qquad \text{(I)} \qquad 1 \text{ pont}$$

Minden valós x-re igaz az egyenlőség, ezért $x=1$-re is, ezt behelyettesítve:

$$-(a+10)+1+10a=(b+c)+bc.$$

A két egyenletet egymásból kivonva

(II) $-$ (I) : $$-a-10=b+c. \qquad \text{(II)} \qquad 1 \text{ pont}$$

Mivel minden valós x-re teljesülnie kell az egyenletnek, ezért $x=-b$-re is igaz. (A b és c szerepe szimmetrikus, ezért $x=-c$-t is behelyettesíthetünk.) 1 pont

Behelyettesítve $x=-b$-t, az egyenlőség jobb oldalán 0 áll:

$$(-b-a)\cdot(-b-10)+1=(-b+b)\cdot(-b+c)$$
$$(-b-a)\cdot(-b-10)=-1$$
$$(b+a)\cdot(b+10)=-1. \qquad 1 \text{ pont}$$

Mivel a és b egészek, ezért két megoldás lehet: $b+a=1$ és $b+10=-1$ vagy $b+a=-1$ és $b+10=1$. 2 pont

Az egyenletrendszert megoldva és (I)-be és (II)-be visszahelyettesítve megkaphatjuk c-t. A két megoldás:

$$a = 8 \qquad\qquad a = 12$$
$$b = -9 \qquad \text{és} \qquad b = -11$$
$$c = -9 \qquad\qquad c = -11.$$

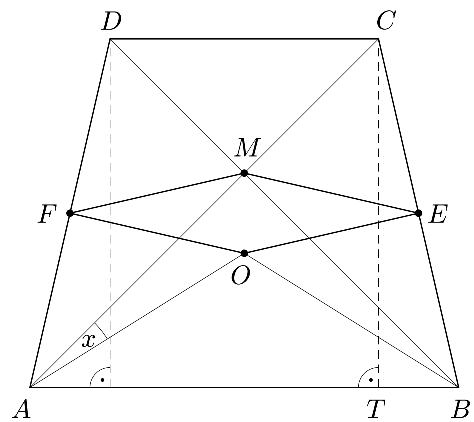
1 pont

(Ez a két számhármas tényleg megoldása a feladatnak.)

Összesen: 7 pont

2. A t területű, m magasságú $ABCD$ húrtrapéz alapjai AB és CD, az átlók metszéspontja M, a trapéz körülírt középpontja O. A BC oldal felezőpontja E, az AD oldalé pedig F. Bizonyítsuk be, hogy ha $t = m^2$, akkor az $OEMF$ négyszög rombusz.

Megoldás. Tekintsük a következő ábrát:



Az $AB = a$, $CD = c$ jelöléssel $BT = \dfrac{a-c}{2}$, így

$$AT = a - \frac{a-c}{2} = \frac{a+c}{2},$$

ezért $m \cdot \dfrac{a+c}{2} = t$ alapján $AT = m$.

Az ATC derékszögű háromszögben $AT = TC = m$, ezért a háromszög egyenlő szárú derékszögű, így $BAC\sphericalangle = 45°$. 1 pont

Az ABM egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei 45 fokosak, ezért $AMB\sphericalangle = 90°$, azaz $BMC\sphericalangle$ értéke is 90°. 1 pont

Az $OAC\sphericalangle = x$ jelöléssel az AOC egyenlő szárú háromszögből $AOC\sphericalangle = 180° - 2x$.

Ezek alapján a BOC egyenlő szárú háromszög BOC szöge

$$360° - AOC\sphericalangle - AOB\sphericalangle = 360° - (180° - 2x) - (90° + 2x) = 90°.$$

1 pont

Tehát $BMC\sphericalangle = BOC\sphericalangle = 90°$, ami azt jelenti, hogy a BMC és BOC közös BC alapú derékszögű háromszög BC átfogójának E felezőpontjára Thalész tétele alapján $EB = EC = EO = EM$ teljesül. 2 pont

Ha pedig $EO = EM$ és a trapéz szimmetrikus, akkor $EM = MF$ és $EO = FO$. Ekkor pedig az $OEMF$ négyszög mindegyik oldala egyenlő hosszú. 1 pont

A négyszög oldalai egyenlő hosszúak (OM még szimmetriatengely is), így a négyszög – ami konvex – biztosan rombusz. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Határozzuk meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 4}$ függvény legkisebb és legnagyobb értékét!

Megoldás. A függvény minden valós számra értelmezett, mert

$$x^2 + 3x + 4 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0.$$

Jelöljük p-vel a függvény által felvett értékek bármelyikét! Ekkor a $px^2 + 3px + 4p = x^2 - 1$, azaz a $(p-1)x^2 + 3px + 4p + 1 = 0$ egyenletet kapjuk. 1 pont

Egyenletünknek biztosan van megoldása x-re, hiszen p az értékkészlet eleme.

$p = 1$ esetén az egyenlet elsőfokú, ekkor viszont sem minimum, sem pedig maximum nincs, hiszen például $f(0) = -\dfrac{1}{4}$, és $f(-2) = \dfrac{3}{2}$, míg $p = 1$, ahol $-\dfrac{1}{4} < 1 < \dfrac{3}{2}$, ha pedig $p = 1$, akkor $x = -\dfrac{5}{3}$. 1 pont

Tehát szélsőérték akkor lehet, ha $p \neq 1$, azaz a $(p-1)x^2 + 3px + 4p + 1 = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa nem negatív. A D diszkrimináns a következő:

$$D = 9p^2 - 4(p-1)(4p+1) = -7p^2 + 12p + 4.$$ 1 pont

A $-7p^2 + 12p + 4 \geqq 0$ egyenlőtlenség bal oldalát szorzattá alakítva $-7(p-2)\left(p + \dfrac{2}{7}\right) \geqq 0$ adódik. 2 pont

Az egyenlőtlenség megoldása $-\dfrac{2}{7} \leqq p \leqq 2$.

Tehát $f(x)$ értékeire teljesül, hogy $-\dfrac{2}{7} \leqq f(x) \leqq 2$. 1 pont

Az $f(x)$ függvény legkisebb értéke $-\dfrac{2}{7}$, ha $x = -\dfrac{1}{3}$, legnagyobb értéke 2, ha $x = -3$ a paraméteres másodfokú egyenlet megoldása alapján. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Az (a_n) számsorozatot a következő módon határozzuk meg: $a_1 = a$, ahol az „a” szám pozitív egész szám, $n \geqq 1$ esetén pedig

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\, a_n, & \text{ha } a_n \text{ páros szám,} \\ 2a_n + 2, & \text{ha } a_n \text{ páratlan szám.} \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy $a = 2^{2006} + 5$ esetén a sorozatnak tagja az 1, 2, 3, 4, 5 számok mindegyike.

Megoldás. Írjuk fel a sorozat néhány első tagját:

$$\begin{array}{llll} a_1 = 2^{2006} + 5, & a_2 = 2^{2007} + 12, & a_3 = 2^{2006} + 6, & a_4 = 2^{2005} + 3, \\ a_5 = 2^{2006} + 8, & a_6 = 2^{2005} + 4, & a_7 = 2^{2004} + 2, & a_8 = 2^{2003} + 1. \end{array}$$

1 pont

Most belátjuk, hogy tetszőleges pozitív egész n esetén tagja a sorozatnak $2^{n-1} + 1$, ha $2^n + 1$ is a sorozat tagja. 1 pont

Ha a sorozat valahányadik tagja $2^n + 1$, akkor a következő tagok $2^{n+1} + 4$, $2^n + 2$, $2^{n-1} + 1$ a képzési szabály alapján, ezzel pedig állításunkat igazoltuk. 1 pont

Amennyiben pedig $2^{2003} + 1$ tagja sorozatunknak, akkor – bizonyításunk alapján – $2^{2002} + 1$, $2^{2001} + 1, \ldots, 2^3 + 1$, $2^2 + 1$ is. 1 pont

De ha $2^2 + 1 = 5$ tagja a sorozatnak, akkor 5-tel kezdődően a következő tagok elemei a sorozatnak:

$$\ldots,\ 5,\ 12,\ 6,\ 3,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1,\ \ldots.$$

2 pont

Látható, hogy ha 5 tagja a sorozatnak, akkor az 1, 2, 3, 4 számok is. Ezzel pedig állításunkat igazoltuk. 1 pont

---

Összesen: 7 pont