**Bolyai János**

**Matematikai Társulat**

Oktatási Minisztérium
Alapkezelő Igazgatósága
támogatásával

# Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
# 2005/2006-os tanév
# 2. forduló
# haladók II. kategória

## Feladatok

**1.** Határozza meg az $a$, $b$, $c$ egészek értékét úgy, hogy a következő egyenlőség minden valós $x$-re teljesüljön:

$$(x-a)\cdot(x-10)+1=(x+b)\cdot(x+c).$$

**2.** A $t$ területű, $m$ magasságú $ABCD$ húrtrapéz alapjai $AB$ és $CD$, az átlók metszéspontja $M$, a trapéz körülírt középpontja $O$. A $BC$ oldal felezőpontja $E$, az $AD$ oldalé pedig $F$. Bizonyítsuk be, hogy ha $t=m^2$, akkor az $OEMF$ négyszög rombusz.

**3.** Határozzuk meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+4}$ függvény legkisebb és legnagyobb értékét!

**4.** Az $(a_n)$ számsorozatot a következő módon határozzuk meg: $a_1=a$, ahol az „$a$” szám pozitív egész szám, $n \geqq 1$ esetén pedig

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\,a_n, & \text{ha } a_n \text{ páros szám,}\\ 2a_n+2, & \text{ha } a_n \text{ páratlan szám.}\end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy $a=2^{2006}+5$ esetén a sorozatnak tagja az 1, 2, 3, 4, 5 számok mindegyike.