Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási Minisztérium
Alapkezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2005/2006-os tanév
első (iskolai) forduló
haladók – II. kategória
(nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók)

Megoldások és javítási útmutató

1. Az a és b valós számra $a^2 + b^2 = 1$ teljesül, ahol $ab \neq 0$. Határozzuk meg az

$$\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\left(1+\frac{1}{b^2}\right)$$

szorzat minimumát.

Megoldás.

$$\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\left(1+\frac{1}{b^2}\right) = \frac{(a^2+1)(b^2+1)}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2+(a^2+b^2)+1}{a^2b^2}.$$ 1 pont

Mivel $a^2+b^2=1$, ezért $\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\left(1+\frac{1}{b^2}\right) = 1+\frac{2}{a^2b^2}$. 1 pont

Az $a^2+b^2=1$ feltétel alapján $\big(|a|-|b|\big)^2+2|ab|=1$, azaz $2|ab|=1-\big(|a|-|b|\big)^2$. 1 pont

Tudjuk, hogy $\big(|a|-|b|\big)^2 \geqq 0$, így $2|ab| = 1-\big(|a|-|b|\big)^2 \leqq 1$.

A kapott egyenlőtlenség tehát $2|ab| \leqq 1$ alakú, ezért $a^2b^2 \leqq \frac{1}{4}$. 1 pont

Ha pedig $a^2b^2 \leqq \frac{1}{4}$, ahol $a^2b^2 > 0$, akkor

$$\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\left(1+\frac{1}{b^2}\right) = 1+\frac{2}{a^2b^2} \geqq 1+\frac{2}{\frac{1}{4}} = 9.$$ 1 pont

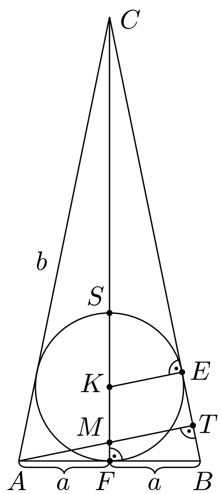
Az $\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\left(1+\frac{1}{b^2}\right)$ szorzat minimuma tehát 9 lehet.

A minimum meg is valósul az $|a|=|b|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ esetben. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Az AB alapú egyenlő szárú háromszög alapjának felezőpontja F, súlypontja S, magasságpontja M, beírt köre k. Ha $FM = \sqrt{6}$ és S illeszkedik k-ra, akkor mekkora a háromszög kerülete?

Megoldás.



Tekintsük az ábrát.

A $KE = KF = KS = r$, $AF = FB = a$, $AC = BC = b$, $FC = m$ jelölésekkel a feltételek alapján $KC = 5r$. 1 pont

A KEC és a BFC háromszög hasonlósága alapján (KCE szög közös) $\dfrac{KE}{FB} = \dfrac{KC}{BC}$, azaz $\dfrac{r}{a} = \dfrac{5r}{b}$, így $b = 5a$. 1 pont

Az AFM és a CFB derékszögű háromszögek is hasonlók, mert $FAM\sphericalangle$ és $FCB\sphericalangle$ merőleges szárú hegyesszögek, 1 pont

így a hasonlóság alapján

$$\frac{FM}{FB} = \frac{AF}{CF}, \quad \text{azaz} \quad \frac{\sqrt{6}}{a} = \frac{a}{m},$$

így $m = \dfrac{a^2}{\sqrt{6}}$. 1 pont

Az AFC derékszögű háromszögre Pitagorasz tételét alkalmazva $a^2 + m^2 = b^2$.

A $b = 5a$, $m = \dfrac{a^2}{\sqrt{6}}$ helyettesítéseket elvégezve $\dfrac{a^4}{6} = 24a^2$ adódik, 1 pont

ahonnan $a = 12$. 1 pont

A háromszög kerülete tehát $2a + 2b = (12 + 60) \cdot 2 = 144$. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. A Piramis Bank elnöke a külvárosból jár be munkahelyére dolgozni. Hétköznapokon egy sofőr jön érte, aki minden nap ugyanabban az időpontban indul a banktól, felveszi az elnököt, és pontosan nyitásra megérkeznek. Egyik reggel a sofőr telefonált, hogy valami baj van az autóval, ezért valószínűleg késni fog. Az elnök emiatt a szokottnál egy órával korábban, gyalog indult munkába. A sofőr közben megjavította az autót, és mégis el tudott indulni a szokásos időpontban, így útközben találkozott a bankárral. Felvette, és nyitás előtt 20 perccel érkeztek a bankhoz.

Mennyi ideig sétált a bankár? (Feltehetjük, hogy az autó sebessége állandó és az utas felvétele nem jár időveszteséggel.)

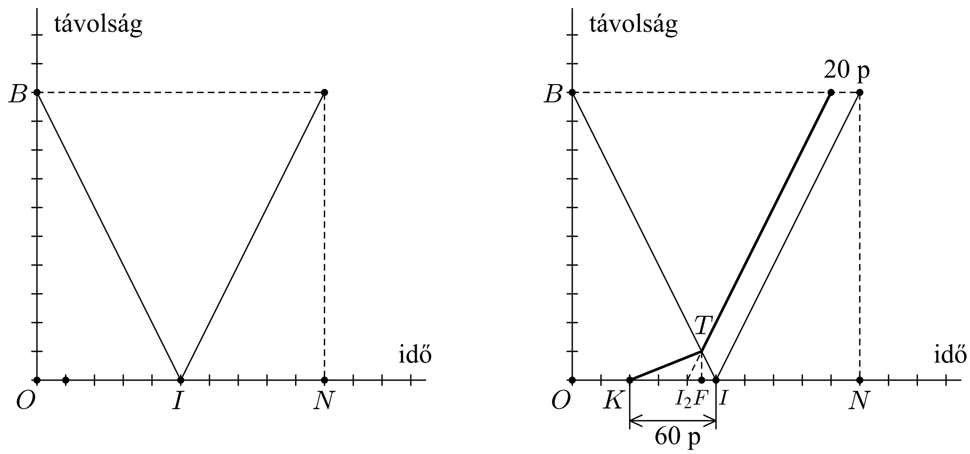
1. megoldás. Mivel az elnök elindult gyalog, a sofőrnek a szokottnál rövidebb utat kellett megtennie. A sofőr állandó sebességgel haladt, tehát a 20 perc különbség úgy jött létre, hogy a bankból a ház felé, majd vissza a bankhoz egyaránt 10–10 perccel kevesebb ideig tartott az út, mint a többi napon. 3 pont

Tehát a megszokotthoz képest 10 perccel korábban szállt be az autóba a Piramis Bank elnöke. 2 pont

Mivel az elnök egy órával korábban indult, mint szokott, és 10 perccel korábban szállt autóba, mint a többi napon, így összesen 50 percig kellett sétálnia. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Ábrázoljuk idő–távolság koordinátarendszerben az adatokat! Jelölje B a bankot, O a bankár lakását (és egyben a sofőr szokásos indulásának időpontját), I azt az időpontot, amikor a bankár be szokott szállni az autóba, N pedig a nyitás pillanatát. A sofőr állandó sebességgel halad, ezért $OI = IN$. 1 pont



1 pont

A rendhagyó napon 60 perccel hamarabb, a K időpontban indult a bankár. Mivel a sofőr az utolsó pillanatban megjavította az autót, ezért a szokásosnál korábban, a T pontban vette fel főnökét. (Itt T egyszerre jelöl időpontot és helyet.) Mivel az autó sebessége nem változott, a vastag vonallal ábrázolt szakasz párhuzamos az első ábrán látható második szakasszal. 1 pont

Emiatt $I_2I = 20$ perc. 1 pont

A T pont idő-tengelyen vett F merőleges vetülete felezi az I_2I szakaszt, mert a sebesség változatlansága miatt az autó mozgását ábrázoló szakaszok egyenlő szöget zárnak be a vízszintes tengellyel. 1 pont

Tehát $FI = 10$ perc, 1 pont
vagyis $KF = 50$ perc.

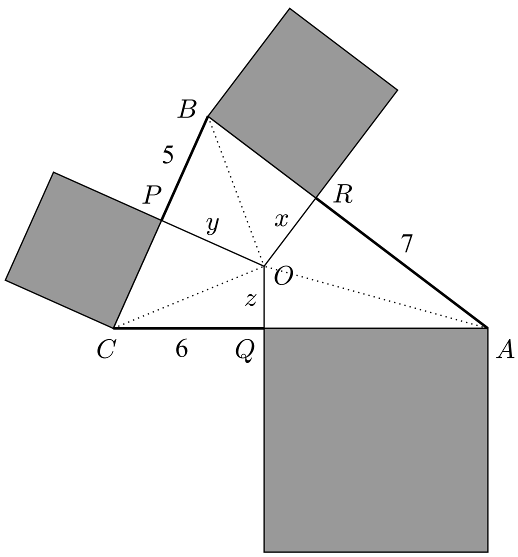
A bankár 50 percet gyalogolt. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Egy ABC hegyesszögű háromszög belsejében egy tetszőleges O pontból merőlegeseket bocsátunk az AB, BC és CA oldalakra. A talppontokat rendre jelöljük R-rel, P-vel és Q-val. Rajzoljunk kifelé négyzeteket az RB-re, PC-re és AQ-ra.

Mekkora a három négyzet területének összege, ha tudjuk, hogy $AR = 7$, $BP = 5$ és $CQ = 6$?

Megoldás.



Legyen $OR = x$, $OP = y$, $OQ = z$, és legyen $PC = p$, $QA = q$, $RB = r$. Keresendő a $p^2 + r^2 + q^2$ összeg.

Írjuk fel a pitagorasz tételt az OQA háromszögre: $z^2 + q^2 = OA^2$.

Az ORA háromszögre: $x^2 + 7^2 = OA^2$.

Mivel az OA átfogó mindkét háromszögben közös, ezért

(I) $$z^2 + q^2 = x^2 + 7^2.$$ 1 pont

Hasonlóan kapjuk, ha felírjuk a BOR háromszögre és a BOP háromszögre a Pitagorasz-tételt:

(II) $$x^2 + r^2 = y^2 + 5^2.$$ 1 pont

És a POC háromszögre és a COQ háromszögre a Pitagorasz-tételt:

(III) $$y^2 + p^2 = z^2 + 6^2.$$ 1 pont

Az (I), (II) és (III) egyenleteket összeadva kapjuk:

$$x^2 + y^2 + z^2 + p^2 + q^2 + r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2.$$ 3 pont

Rendezés után

$$p^2 + q^2 + r^2 = 5^2 + 6^2 + 7^2$$
$$p^2 + q^2 + r^2 = 110.$$

Tehát a három négyzet területének összege 110. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Határozza meg azokat az egész számokból álló $(x; y)$ számpárokat, amelyek kielégítik a következő egyenletet:

$$(x+2)^4 - x^4 = y^3.$$

Megoldás. Az $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ azonosságot használjuk az egyenlet bal oldalára:

$$\big((x+2)^2 - x^2\big)\big((x+2)^2 + x^2\big) = y^3. \qquad \text{1 pont}$$

Az azonosságot ismét alkalmazzuk a bal oldal első tagjára:

$$(x+2-x)(x+2+x)(2x^2+4x+4) = y^3.$$

És kiemeljük a ketteseket:

$$2^3(x+1)(x^2+2x+2) = y^3. \qquad \text{1 pont}$$

A második zárójelben teljes négyzetté alakítjuk a kifejezést

$$(x+1)\big((x+1)^2+1\big) = \left(\frac{y}{2}\right)^3. \qquad \text{1 pont}$$

Az $(x+1)$ és az $\big((x+1)^2+1\big)$ relatív prím, ezért csak akkor lesz a baloldal is teljes harmadik hatvány, ha $(x+1)$ is egy köbszám, és az $(x+1)^2+1$ is egy köbszám.

$$(x+1) = a^3$$
$$\big((x+1)^2+1\big) = b^3,$$

ahol $a, b \in \mathbb{Z}$. 2 pont

Tehát $\left(a^3\right)^2 + 1 = b^3$, ahol $\left(a^3\right)^2 \geqq 0$, és $\left(a^2\right)^3 + 1 = b^3$ ezért a szomszédos nem negatív egészek köbének különbségét vizsgálva – ami szigorúan monoton nő – adódik az $a = 0$, és $b = 1$. 1 pont

(Itt hivatkozhatunk arra is, hogy ha az $b^3 - a^6 = 1$ egyenlet bal oldalát szorzattá alakítjuk:

$$b^3 - a^6 = (b-a^2)(b^2+ba^2+a^4) = 1.$$

Mivel a és b egész számok, ezért vagy

$(b-a^2) = 1$ és $(b^2+ba^2+a^4) = 1$ vagy $(b-a^2) = -1$ és $(b^2+ba^2+a^4) = -1$.

Az egyenletrendszereket megoldva is az $a = 0$, és $b = 1$ megoldást kapjuk.

Innen $x = -1$ és $y = 0$ az egyetlen lehetséges megoldás, és ez a számpár valóban kielégíti az egyenletet. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

AZ I. KATEGÓRIA DOLGOZATAINAK TOVÁBBJUTÁSI PONTHATÁRA 18 PONT