Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási Minisztérium
Alapkezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2005/2006-os tanév
első (iskolai) forduló
haladók – II. kategória
(nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók)

Feladatok

1. Az a és b valós számra $a^2 + b^2 = 1$ teljesül, ahol $ab \neq 0$. Határozzuk meg az

$$\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\left(1+\frac{1}{b^2}\right)$$

szorzat minimumát.

2. Az AB alapú egyenlő szárú háromszög alapjának felezőpontja F, súlypontja S, magasságpontja M, beírt köre k. Ha $FM = \sqrt{6}$ és S illeszkedik k-ra, akkor mekkora a háromszög kerülete?

3. A Piramis Bank elnöke a külvárosból jár be munkahelyére dolgozni. Hétköznapokon egy sofőr jön érte, aki minden nap ugyanabban az időpontban indul a banktól, felveszi az elnököt, és pontosan nyitásra megérkeznek. Egyik reggel a sofőr telefonált, hogy valami baj van az autóval, ezért valószínűleg késni fog. Az elnök emiatt a szokottnál egy órával korábban, gyalog indult munkába. A sofőr közben megjavította az autót, és mégis el tudott indulni a szokásos időpontban, így útközben találkozott a bankárral. Felvette, és nyitás előtt 20 perccel érkeztek a bankhoz.

Mennyi ideig sétált a bankár? (Feltehetjük, hogy az autó sebessége állandó és az utas felvétele nem jár időveszteséggel.)

4. Egy ABC hegyesszögű háromszög belsejében egy tetszőleges O pontból merőlegeseket bocsátunk az AB, BC és CA oldalakra. A talppontokat rendre jelöljük R-rel, P-vel és Q-val. Rajzoljunk kifelé négyzeteket az RB-re, PC-re és AQ-ra.

Mekkora a három négyzet területének összege, ha tudjuk, hogy $AR = 7$, $BP = 5$ és $CQ = 6$?

5. Határozza meg azokat az egész számokból álló $(x; y)$ számpárokat, amelyek kielégítik a következő egyenletet:

$$(x+2)^4 - x^4 = y^3.$$