Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási Minisztérium
Alapkezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2005/2006-os tanév
I. forduló
kezdők I–II–III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Aladár és Béla együtt ünnepli születésnapját 2006-ban. Aladár pontosan kétszer annyi idős, mint Béla. Aladár születési évének utolsó két számjegyét felcserélve éppen Béla születési évét kapjuk. Mennyi idősek most? (6 pont)

Megoldás. Mivel mindketten azonos évszázadban születtek, Aladár születési éve legalább 1907. Nem lehet Aladár születési éve 2000, mert ekkor Béla születési éve is 2000 lenne. Nem lehet Aladár születési éve 2000-nél több, mert ekkor Béla születési éve legalább 2010 lenne. Így mindkettőjük születési éve 19-cel kezdődik. 1 pont

Legyen Aladár születési éve $1900 + 10a + b$ (ahol a és b számjegyek). Ekkor Béla születési éve $1900 + 10b + a$ és $2006 - (1900 + 10a + b) = 2\big(2006 - (1900 + 10b + a)\big)$. 2 pont

Ebből egyszerű számolással azt kapjuk, hogy: $19b = 106 + 8a$. Így b páros és legalább 6, tehát b értéke 6 vagy 8 lehet. A $b = 8$ nem felel meg.

Ha $b = 6$, akkor $a = 1$, Aladár 1916-ban, Béla 1961-ben született és most Aladár 90, Béla 45 éves. 3 pont

2. Rest Elek nem készült a dolgozatra, de tudta, hogy ugyanazokat a feladatokat szokták kapni, mint a párhuzamos osztály, legfeljebb más sorrendben. Megtudta, hogy a párhuzamos osztályban A, C, D, B voltak a helyes válaszok. Így ő is ezt írta le valamilyen sorrendben. Mennyi annak a valószínűsége, hogy $a)$ nem lesz jó válasza; $b)$ pontosan 1 jó válasza lesz; $c)$ pontosan 2 jó válasza lesz; $d)$ pontosan 3 jó válasza lesz; $e)$ mind a négy válasza jó lesz? (6 pont)

Megoldás. Tegyük fel, hogy Elek dolgozatírásakor a helyes válaszok (ebben a sorrendben) ABCD. Ennek a négy betűnek 24 sorrendje van. Feltesszük, hogy ezek bármelyikének a valószínűsége ugyanannyi. 1 pont

Elek mind a négy válasza csak akkor lesz jó, ha a válaszai: ABCD, tehát ennek a valószínűsége: $\dfrac{1}{24}$. 1 pont

Nem adhat pontosan 3 jó választ, mert ha 3 válasza jó, akkor a negyedik is, tehát ennek a valószínűsége 0. 1 pont

Pontosan 2 válasza jó, ha az ABDC, ADCB, ACBD, DBCA, CBAD, BACD valamelyikét válaszolja, tehát ennek a valószínűsége: $\dfrac{6}{24} = \dfrac{1}{4}$. 1 pont

(Ha két adott helyen álló válasza jó, akkor csak egyféleképpen lehet, hogy a maradó kettő ne legyen jó és mivel négy helyből két helyet 6-féleképpen lehet kiválasztani, így is megkapjuk a hat esetet.)

Pontosan 1 válasza jó, ha az ACDB, ADBC, CBDA, DBAC, BDCA, DACB, BCAD, CABD valamelyikét válaszolja, tehát ennek a valószínűsége: $\dfrac{8}{24} = \dfrac{1}{3}$. 1 pont

(Ha egy adott helyen álló válasza jó, akkor kétféleképpen lehet, hogy a maradó három ne legyen jó és mivel az adott hely négyféle lehet 8 ilyen eset van.)

Nincs jó válasza, ha a BADC, BCDA, BDAC, CADB, CDAB, CDBA, DABC, DCAB, DCBA valamelyikét válaszolja, tehát ennek a valószínűsége: $\dfrac{9}{24} = \dfrac{3}{8}$. 1 pont

(Ha az első helyen álló válasz rossz, akkor az ennek megfelelő jó válasz helyén a maradó három bármelyike állhat és a maradó kettő már csak egyféleképpen lehet, ezért $3 \cdot 3 = 9$ ilyen eset van.)

Megjegyzések. Egy adott pont csak hibátlan eredményért adható. Bármelyik valószínűség megkapható úgy, hogy a többi összegét 1-ből kivonjuk.

3. Hányféleképpen lehet (a tízes számrendszerben) a 2006-ot legalább két egymást követő pozitív egész szám összegeként felírni? (8 pont)

Megoldás. m db n-nel kezdődő egymást követő pozitív egész szám összege:

$$m \cdot \frac{n+n+m-1}{2} \qquad \text{és} \qquad 2006 = 2 \cdot 17 \cdot 59.$$

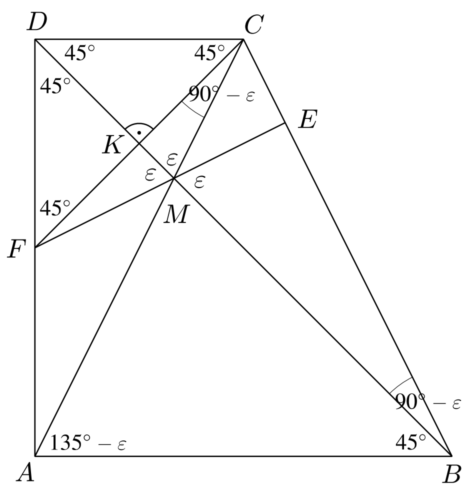
Tehát: $(2n+m-1) \cdot m = 2^2 \cdot 17 \cdot 59$. 2 pont

m csak a jobb oldal valamelyik osztója lehet. $2n+m-1 > m$, $2n+m-1$ és m különböző paritású és $m > 1$, tehát m értéke csak 4, 17 és 59 lehet.

Ellenőrizhető, hogy mindhárom jó, tehát háromféleképpen lehet a 2006-ot legalább két egymást követő pozitív egész szám összegeként felírni. 6 pont

4. Az $ABCD$ derékszögű trapézban AB párhuzamos CD-vel, AD merőleges AB-re és $AB = AD = 2CD$. Jelölje M az AC és BD átlók metszéspontját, és F az AD oldal felezőpontját! Bizonyítsa be, hogy MF merőleges BC-re! (10 pont)

Megoldás.



Az ABD és CDF háromszögek egyenlő szárú derékszögű háromszögek, tehát

$$ADB\sphericalangle = MDC\sphericalangle = FCD\sphericalangle = ABD\sphericalangle = 45°.$$

Így MD felezi az FMC szöget és az FC és MD szakaszok K metszéspontjánál derékszögek vannak. 3 pont

Legyen $CMK\sphericalangle = KMF\sphericalangle = EMB\sphericalangle = \varepsilon$!

Az MCK derékszögű háromszögből $MCK\sphericalangle = 90° - \varepsilon$. A $CAB\sphericalangle$ és $ACD\sphericalangle$ váltószögek. Így

$$CAB\sphericalangle = ACD\sphericalangle = 45° + 90° - \varepsilon = 135° - \varepsilon. \quad \text{3 pont}$$

$AB \parallel DC$ és $AB = 2DC$, tehát $AC = BC$. Ezért $CBA\sphericalangle = 135° - \varepsilon$ és így $CBM\sphericalangle = (135° - \varepsilon) - 45° = 90° - \varepsilon$.

Tehát $CBM\sphericalangle + EMB\sphericalangle = 90°$, vagyis FM merőleges BC-re. 4 pont

Csak hiánytalanul indokolt megoldásra adható 10 pont.

5. Oldja meg a

$$p^q + q^p = r$$

egyenletet, ha p, q, r pozitív prímszámok! (10 pont)

Megoldás. Ha p és q is páratlan, akkor p^q és q^p is páratlan, 1-nél nagyobb számok, ezért az összegük páros és nagyobb 2-nél, tehát nem lehet prímszám. 1 pont

Ha p és q is páros, akkor mindkettő egyenlő 2-vel, ekkor $r = 8$, ami nem prímszám. 1 pont

Marad tehát az az eset, hogy p és q egyike páros, másik páratlan. Legyen $p = 2$ és q páratlan prímszám. Ekkor 2^q 3-mal osztva 2-t ad maradékul és q^2 3-mal osztva 1-et ad maradékul, ha $q > 3$. Így $2^q + q^2$ osztható 3-mal és 3-nál nagyobb, tehát nem lehet prímszám. 7 pont

Ha $q = 3$, akkor $2^3 + 3^2 = 8 + 9 = 17$, ami prímszám. Tehát két megoldás van:

$$p = 2,\ q = 3,\ r = 17 \qquad \text{és} \qquad p = 3,\ q = 2,\ r = 17. \quad \text{1 pont}$$