Bolyai János
Matematikai Társulat

Oktatásért Közalapítvány
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2010/2011-es tanév
kezdők I–II. kategória II. forduló
kezdők III. kategória I. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Hány olyan 3-mal osztható hatjegyű természetes szám van (a tízes számrendszerben), amelyben nincs 2-nél nagyobb számjegy? (6 pont)

1. megoldás. Egy szám pontosan akkor osztható 3-mal, ha a számjegyeinek összege osztható 3-mal. Vegyük sorra például a lehetséges eseteket annak megfelelően, hogy hány darab 0 jegyet használtunk fel. Nyilván minden jegy nem lehet 0, másrészt pontosan 5 darab jegy sem lehet 0, hiszen ekkor a maradó jegy 1-es vagy 2-es, de a jegyek összege ekkor nem lesz 3-mal osztható. Ha pontosan 4 darab jegy 0, akkor a maradó két jegy közül az egyik 1-es, a másik 2-es kell, hogy legyen, így lesz a jegyek összege 3-mal osztható. Az első számjegyre kétféle választásunk van, a maradó 1-est vagy 2-est pedig további 5 helyre tehetjük, így ebben az esetben 10 számot gyárthatunk. 1 pont

Ha pontosan 3 darab jegy 0, akkor (például az egyesek száma szerint nézve az eseteket) látható, hogy a többi számjegy vagy csupa 1-es, vagy csupa 2-es. Ilyen módon $2 \cdot \binom{5}{3} = 20$ szám készíthető. 1 pont

Ha pontosan 2 darab jegy 0, akkor a maradó jegyek a következők lehetnek: két 1-es és két 2-es. Ilyen módon $\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} = 60$ szám készíthető. 1 pont

Ha pontosan 1 darab jegy 0, akkor a maradó jegyek a következők lehetnek: egy darab 1-es és a többi 2-es, vagy egy darab 2-es és a többi 1-es. Ilyen módon $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$ szám készíthető. 1 pont

Végül, ha nem tartalmaz 0 jegyet, akkor vagy csupa 1-es, vagy csupa 2-es, vagy pedig három-három 1-es és 2-es jegyből állhat a szám. Ilyen módon $1 + 1 + \binom{6}{3} = 22$ szám készíthető. 1 pont

Tehát, $10 + 20 + 60 + 50 + 22 = 162$ szám készíthető a feladat feltételeinek megfelelően. 1 pont

2. megoldás. Az első számjegy 1-es vagy 2-es lehet, a második, harmadik, negyedik és ötödik számjegyet háromféleképpen választhatjuk meg. 2 pont

Az első öt számjegy összegének 3-mal való osztási maradéka egyértelműen meghatározza az utolsó számjegyet: ha a maradék 0, akkor az utolsó helyre is 0-t kell írnunk, 1 maradék esetén 2-est, 2 maradék esetén 1-est, így lesz a számjegyek összege, és maga a szám, 3-mal osztható. 2 pont

Tehát $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 162$ szám készíthető a feltételeknek megfelelően. 2 pont

2. Az első tíz pozitív egész szám közül kiválasztottunk hatot. Bizonyítsa be, hogy van olyan 1-nél nagyobb négyzetszám, amely osztója a szorzatuknak! (6 pont)

1. megoldás. Az 1-en kívül legalább öt számot választottunk ki. 1 pont

Ezen öt szám mindegyikének van legalább egy prímosztója, ami a 2, 3, 5, 7 számok közül kerül ki, hiszen nincs más prímszám 10-ig. 2 pont

Ez négy darab prímszám, így a skatulya-elv szerint az 1-en kívül kiválasztott öt szám között van legalább két olyan, amelynek van közös prímosztója. Legyen p egy ilyen közös prímosztó! 2 pont

Ekkor a hat kiválasztott szám szorzata osztható p^2-nel. 1 pont

2. megoldás. Ha a kiválasztott számok között legalább két páros szám van, akkor a szorzat osztható 4-gyel, ebben az esetben tehát készen vagyunk. 2 pont

Ha pedig nincs két páros szám a kiválasztott számok között, akkor az 1, 3, 5, 7, 9 számokat mindenképpen ki kellett választani. 2 pont

Így a kiválasztott számok szorzata osztható 9-cel. 2 pont

3. Jelölje $\mathbb{P}$ a prímszámok halmazát! Legyen $f\colon \mathbb{P} \to \mathbb{R}\ x \mapsto \left\{\frac{x^2-1}{24}\right\}$, ahol $\{z\}$ a z szám törtrészét jelöli (azaz $\{z\} = z - [z]$ és $[z]$ a z egész része, vagyis az a legnagyobb egész szám, amely z-nél nem nagyobb)! Mi az f függvény értékkészlete? (8 pont)

Megoldás. $\dfrac{x^2-1}{24} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{24}$. 1 pont

Ha $x = 2$, akkor a tört értéke $\dfrac{1}{8}$. 1 pont

Ha $x = 3$, akkor a tört értéke $\dfrac{1}{3}$. 1 pont

Ha x 3-nál nagyobb prímszám, akkor $(x-1)$ vagy $(x+1)$ osztható 3-mal. 2 pont

$(x-1)$ és $(x+1)$ egymást követő páros számok, tehát a szorzatuk osztható 8-cal. 1 pont

Tehát $(x-1)(x+1)$ osztható 24-gyel (a 3 és 8 relatív prímek).

Így a tört értéke egész szám, amelynek a törtrésze 0. 1 pont

Ezért az f függvény értékkészlete: $\left\{0; \frac{1}{8}; \frac{1}{3}\right\}$. 1 pont

4. Van-e olyan x egész szám, amelyre:

$$2010 + 2009x + 2008x^2 + 2007x^3 + \ldots + 3x^{2007} + 2x^{2008} + x^{2009} = 0? \qquad \text{(10 pont)}$$

1. megoldás. Alakítsuk át az egyenlőség bal oldalát.

$$1 + (2009 + 2009x) + x^2 + \left(2007x^2 + 2007x^3\right) + \ldots + x^{2008} + \left(x^{2008} + x^{2009}\right) =$$

$$= 1 + x^2 + \ldots + x^{2008} + 2009(1 + x) + 2007x^2(1 + x) + \ldots + x^{2008}(1 + x) =$$

$$= \underbrace{1 + x^2 + \ldots + x^{2008}}_{A} + (1 + x)(\underbrace{2009 + 2007x^2 + 2005x^4 + \ldots + x^{2008}}_{B}). \qquad \text{5 pont}$$

Összehasonlítva a két kapcsos kifejezést, egyszerűen látható, hogy $B > A$. 3 pont

Így $-1 < 1+x < 0$, vagyis x egy -2 és -1 közötti szám, azaz nem lehet egész, tehát nincs olyan egész szám, amire a feladatban felírt egyenlőség teljesül. 2 pont

2. megoldás (vázlat). Jelölje S az egyenlőség bal oldalát! Ekkor:

$$Sx - S = -2010 + x + x^2 + \ldots + x^{2009} + x^{2010}, \quad \text{azaz}$$

$$S(x - 1) + 2010 = x + x^2 + \ldots + x^{2009} + x^{2010}. \qquad \text{3 pont}$$

$$\big(S(x - 1) + 2010\big)x - \big(S(x - 1) + 2010\big) = x^{2011} - x. \qquad \text{3 pont}$$

Ha $x = 1$, akkor $S = 2010 + 2009 + \ldots + 2 + 1 \neq 0$.

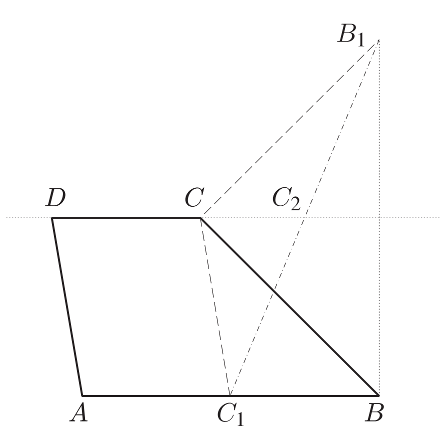
Így, ha $x \neq 1$ és $S = 0$, akkor: $2010\,x - 2010 = x^{2011} - x$, azaz $x\big(2011 - x^{2010}\big) = 2010$.

Az x egész, tehát osztója 2010-nek. Nyilvánvaló, hogy ezekre az osztókra, sőt semmilyen 1-től különböző egészre ez egyenlőség nem teljesül.

Tehát nincs olyan egész szám, amelyre a feladatban szereplő egyenlőség teljesül. 4 pont

5. Legalább mekkora egy olyan trapéznak a kerülete, amelynek alapjai 10 cm és 20 cm, magassága 12 cm? (10 pont)

Megoldás.



Legyen a trapéz hosszabbik alapja AB, a rövidebbik CD! Mivel a trapéz alapjainak összege 30 cm, a kerülete akkor lesz a legkisebb, ha a szárainak összege a legkisebb. 1 pont

Kössük össze az AB alap C_1 felezőpontját C-vel 2 pont és legyen B_1 a B-nek a CD egyenesére vonatkozó tükörképe! 2 pont

Ekkor AC_1CD paralelogramma, tehát $AD = CC_1$, illetve $BC = B_1C$, mert a két szakasz egymásnak tükörképe. Így a trapéz szárainak összege: $BC + AD = C_1C + CB_1$, ami akkor a legkisebb, ha C a C_1B_1-nek a CD egyenesével való C_2 metszéspontja. 2 pont

Ekkor a BB_1C_1 derékszögű háromszögből Pitagorasz tételét használva: $C_1B_1^2 = 10^2 + 24^2$ (BC_1 az AB fele tehát 10, BB_1 a magasság kétszerese tehát 24), azaz $C_1B_1 = 26$. 2 pont

Tehát a trapéz kerülete legalább 30 cm + 26 cm = 56 cm. 1 pont

Megjegyzés. A megoldásból kiolvasható, hogy azon trapézok közül, amelyeknek adott a két alapja és a magassága, a húrtrapéz kerülete a legkisebb.