Bolyai János
Matematikai Társulat

Oktatásért Közalapítvány
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2010/2011-es tanév
I. forduló
kezdők I–II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. András, Béla, Csaba, Dénes és Elemér egy asztal körül ülnek. Andrásnál kezdetben 5 kavics van, a többieknél egy sincs. Egy lépés abból áll, hogy valaki, akinél legalább 2 kavics van, a két szomszédjának ad egyet-egyet. El tudják-e érni, hogy néhány lépés után mindannyiuknál pontosan 1 kavics legyen? (6 pont)

Megoldás. Megmutatjuk, hogy el tudják érni, hogy néhány lépés után mindannyiuknál pontosan 1 kavics legyen. Jelöljünk mindenkit a neve kezdőbetűjével, és tegyük fel, hogy $ABCDE$ sorrendben ülnek körben (ez nyilván feltehető)!

Pontosan négy lehetséges lebonyolítás van.

I) 1. lépés: A ad, ezután (A: 3, B: 1, C: 0, D: 0, E: 1).
2. lépés: A ad, ezután (A: 1, B: 2, C: 0, D: 0, E: 2).
3. lépés: B ad, ezután (A: 2, B: 0, C: 1, D: 0, E: 2).
4. lépés: E ad, ezután (A: 3, B: 0, C: 1, D: 1, E: 0).
5. lépés: A ad, ezután (A: 1, B: 1, C: 1, D: 1, E: 1).

II) 1. lépés: A ad, ezután (A: 3, B: 1, C: 0, D: 0, E: 1).
2. lépés: A ad, ezután (A: 1, B: 2, C: 0, D: 0, E: 2).
3. lépés: E ad, ezután (A: 2, B: 2, C: 0, D: 1, E: 0).
4. lépés: B ad, ezután (A: 3, B: 0, C: 1, D: 1, E: 0).
5. lépés: A ad, ezután (A: 1, B: 1, C: 1, D: 1, E: 1).

III) 1. lépés: A ad, ezután (A: 3, B: 1, C: 0, D: 0, E: 1).
2. lépés: A ad, ezután (A: 1, B: 2, C: 0, D: 0, E: 2).
3. lépés: B ad, ezután (A: 2, B: 0, C: 1, D: 0, E: 2).
4. lépés: A ad, ezután (A: 0, B: 1, C: 1, D: 0, E: 3).
5. lépés: E ad, ezután (A: 1, B: 1, C: 1, D: 1, E: 1).

IV) 1. lépés: A ad, ezután (A: 3, B: 1, C: 0, D: 0, E: 1).
2. lépés: A ad, ezután (A: 1, B: 2, C: 0, D: 0, E: 2).
3. lépés: E ad, ezután (A: 2, B: 2, C: 0, D: 1, E: 0).
4. lépés: A ad, ezután (A: 0, B: 3, C: 0, D: 1, E: 1).
5. lépés: B ad, ezután (A: 1, B: 1, C: 1, D: 1, E: 1).

A négy konstrukció bármelyikének *teljes* megadása: 6 pont.

Egynél több jó konstrukció teljes megadása esetén összesen 9 pont adható.

2. Egy 4-fős társaság a következő játékot játszotta. Egy zsákba betettek 3 piros és 3 kék sapkát, majd mindenki behunyt szemmel kihúzott egy sapkát és a fejére tette. Ezek után kinyitották a szemüket, és megvizsgálták egymás sapkáinak a színét. A következő beszélgetés játszódott le közöttük:

A: „Nem tudom, hogy milyen színű sapka van a fejemen."

B: „Mielőtt ezt mondtad én is így voltam vele, de most már kitaláltam, hogy az én fejemen milyen színű sapka van."

Milyen színű sapkák maradtak a zsákban? (6 pont)

Megoldás. Ha **A** 3 piros vagy 3 kék sapkát látna, akkor tudná, hogy a fején a látottól eltérő színű sapka van. Így mivel **A** kezdetben nem tudta milyen színű sapka van a fején, biztosan lát piros és kék sapkákat is. 2 pont

Kezdetben **B** sem tudta, hogy milyen színű sapka van a fején, így neki is látnia kell piros és kék sapkát is. **A** megjegyzése után **B** már tudja, hogy **A** is lát piros és kék sapkát is. Ebből csak akkor tud rájönni a saját sapkájának színére, ha **C** és **D** fején egyforma színű sapka van – hiszen ez esetben neki ettől eltérő színű sapkájának kell lennie, amelynek színe egyezik **A** sapkájának színével. 3 pont

Tehát biztosan 2 piros és 2 kék sapkát húztak ki, azaz 1 piros és 1 kék sapka maradt a zsákban. 1 pont

3. Hány olyan hatjegyű természetes szám van, amelynek 2011-gyel való osztási maradéka 2010? (6 pont)

Megoldás. A keresett hatjegyű szám a következő alakban írható:

$$2011\,a + 2010, \quad \text{ahol} \quad a \in \mathbb{N}.$$ 1 pont

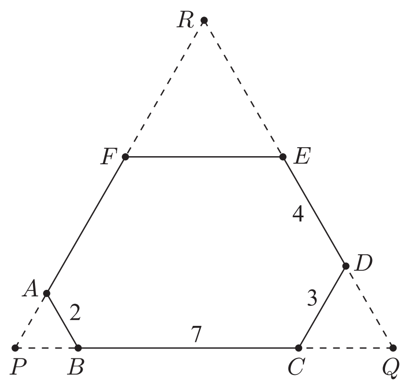
Mivel hatjegyű, ezért $10^5 \leqq 2011\,a + 2010 < 10^6$. 1 pont

Ezért: $49 \leqq a \leqq 496$. 2 pont

Tehát $496 - 48 = 448$ ilyen természetes szám van. 2 pont

4. Az $ABCDEF$ hatszögre igaz, hogy minden szöge $120°$-os, AB oldala 2 cm, BC oldala 7 cm, CD oldala 3 cm és DE oldala 4 cm hosszú. Milyen hosszúak az EF, illetve FA oldalak? (6 pont)

Megoldás.



Hosszabbítsuk meg a hatszög BC, ED és FA oldalát! Az oldalegyenesek metszéspontját jelölje P, Q, illetve R. 1 pont

Mivel a PAB szög a hatszög külső szöge, nagysága: $180° - 120° = 60°$. Ugyanez igaz az ABP szögre. Így az ABP háromszög egyenlőoldalú. És minden oldalának hossza 2 cm. Hasonlóan belátható, hogy a CDQ háromszög minden oldala 3 cm, illetve, hogy az EFR háromszög oldalai egyenlő hosszúak. 1 pont

A PQR háromszög is egyenlőoldalú, mivel minden szöge $60°$-os. 1 pont

A PQR háromszög oldalának hossza:

$$PQ = PB + BC + CQ = 2 \text{ cm} + 7 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 12 \text{ cm}.$$ 1 pont

Innen $EF = ER = QR - (QD + DE) = 12 \text{ cm} - (4 \text{ cm} + 3 \text{ cm}) = 5$ cm hosszúságú, és $FA = RP - (RF + AP) = 12 \text{ cm} - (2 \text{ cm} + 5 \text{ cm}) = 5$ cm hosszúságú. 2 pont