Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2009/2010-es tanév
első (iskolai) forduló
haladók – II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Tekintsük azokat a négyjegyű pozitív egész számokat, amelyek számjegyeinek összege 4. Hány százalék az esélye annak, hogy ezek közül egyet véletlenszerűen kiválasztva páros számot kapunk?

Megoldás. Az összes megfelelő négyjegyű szám a következő:

4000,
3100, 3010, 3001,
2200, 2020, 2002, 2110, 2101, 2001,
1300, 1030, 1003, 1210, 1201, 1120, 1102,
1021, 1012,
1111.

A feltételeknek megfelelő négyjegyű számok száma 20. — 3 pont

[Bármilyen helyes leszámolási eljárás alapján kapott jó eredmény is 3 pontot ér.]

A 20 darab lehetséges eset közül 13 darab páros szám:
4000, 3100, 3010, 2200, 2020, 2002, 2110, 1300, 1030, 1210, 1120, 1102, 1012. — 2 pont

[Bármilyen helyes leszámolási rend esetén jár a 2 pont.]

A páros szám választásának esélye így $\frac{13}{20}$. — 1 pont

$\frac{13}{20} = \frac{65}{100} = 65\%$. Tehát 65% az esélye annak, hogy a választott szám páros lesz. — 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Elvileg helyes megoldás esetén is csak legfeljebb 5 pont adható, ha a tanuló hibásan állapítja meg az összes vagy a kedvező esetek számát.

2. Bizonyítsuk be, hogy 9 darab egymást követő egész szám négyzetének összege
$a)$ nem lehet prímszám,
$b)$ nem lehet négyzetszám.

Megoldás. Ha a középső, azaz az ötödik szám x, ahol $x \in \mathbb{Z}$, akkor a kilenc szám: $x-4$, $x-3$, $x-2$, $x-1$, x, $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$.

Ezeknek a számoknak a négyzetösszege $9x^2 + 2(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$.

A négyzetösszeg így $9x^2 + 60 = 3(3x^2 + 20)$. 2 pont

$a)$ Mivel $3x^2 + 20 \geqq 20$, ezért $3(3x^2 + 20)$ nem lehet prímszám. 1 pont

$b)$ Ha $9x^2 + 60$ négyzetszám lehetne, akkor $9x^2 + 60 = y^2$, $y \in \mathbb{Z}$ alapján y csak 3-mal osztható szám lehet, hiszen

$$9x^2 + 60 = 3(3x^2 + 20).$$ 1 pont

De ha y 3-mal osztható egész szám, akkor a négyzete 9-cel osztható. 1 pont

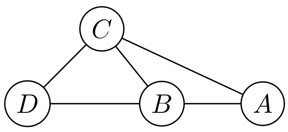
Viszont $9x^2 + 60$ nem osztható 9-cel, hiszen 60 csak 3-mal osztható, de 9-cel nem. 1 pont

Így pedig a 9 darab szám négyzetösszege négyzetszám sem lehet. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Bergengóciában a térképek kicsit eltérnek a megszokottól. A térképen feltüntetik, hogy milyen hosszú utak kötik össze a városokat, ez minden esetben pozitív egész szám kilométerekben megadva. De csatolnak a térképhez egy táblázatot is, ahol feltüntetik, hogy két város közt utakon haladva – akár más városokon keresztül – milyen hosszú a legrövidebb út. Azt azonban nem közlik, hogy ez a legrövidebb út merre, közvetlenül vagy milyen városokon keresztül megy.

A következő ábra egy bergengóc térképet mutat, de hiányoznak róla a városokat összekötő utak hosszai. Azonban megvan a legrövidebb utak táblázata, bár az is hiányosan.



B	60		
C	?	10	
D	100	40	50
	A	B	C

Milyen szám állhat a kérdőjel helyén?

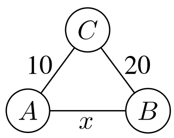
Megoldás. Két jelölést vezetünk be.

$f(A, B)$-vel jelöljük az A és B várost közvetlenül összekötő autóút hosszát, ha pedig nincs a két város között út, akkor $f(A, B)$ nem értelmezett. Az utak mindig kétirányúak, ezért $f(A, B) = f(B, A)$ bármely két város esetén.

$g(A, B)$ pedig a két város között (esetleg más városokon keresztül) vezető legrövidebb út hosszát adja meg.

Két észrevételt teszünk.

1. A legrövidebb utak hosszának táblázata nem határozza meg egyértelműen a közvetlen utak hosszát.



B	30	
C	10	20
	A	B

A fenti példában ha $f(A, C) = 10$ és $f(B, C) = 20$, akkor a táblázat alapján csak annyit mondhatunk, hogy $x = f(A, B) \geqq 30$. Ugyanis ha A és B között a közvetlen út hossza több, mint 30 kilométer, akkor A-ból C-n keresztül eljuthatunk B-be 30 kilométert autózva, és ez a „nagy” $A-B$ távolság nem rövidítheti le a közvetlen $A-C$, $C-B$ utakat, tehát a táblázat nem változik, ha x helyébe tetszőleges 30-nál nagyobb egész számot írunk.

2. A legrövidebb utak hosszára teljesül a „háromszögegyenlőtlenség”:

$$g(A,B)+g(B,C) \geqq g(A,C).$$

Ha A-ból B-be a legrövidebb út x kilométer, B-ből C-be pedig y, akkor az $A \to B \to C$ út hossza $x+y$, és $g(A,C)$ nem lehet ennél több, hiszen ez egy lehetséges $A \to C$ út.

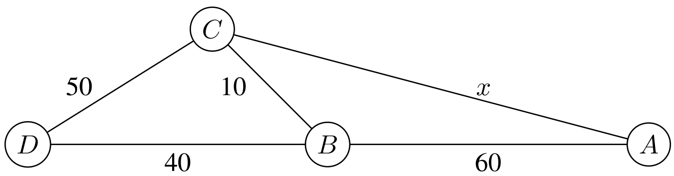
A második észrevétel alapján a hiányzó értékre a következő feltételeket kapjuk:

$$g(A,C) \leqq g(A,B)+g(B,C) = 70,$$

$$g(A,B) \leqq g(A,C)+g(B,C) \Rightarrow 60 \leqq g(A,C)+10 \Rightarrow 50 \leqq g(A,C).$$

Az eddigiekből $50 \leqq g(A,C) \leqq 70$.

A két határ között bármelyik (egész) érték megvalósulhat: ha a következő ábrán x értéke 50 és 70 között van, akkor $g(A,C)=x$.



Pontozás.

Ha a versenyző megad legalább egy helyes értéket 50 és 70 között, amihez rajzol egy jó térképet, az utak hosszával: 2 pont.

Ha észreveszi, hogy több megoldás is lehetséges és megad legalább két különbözőt: 3 pont.

Ha megtalálja a helyes határokat (50 és 70): 4 pont.

A határok bizonyítással együtt: 6 pont.

A maximális 7 pont pedig akkor jár, ha azt is bebizonyította, hogy 50 és 70 között bármelyik érték megvalósulhat.

4. Az x és y pozitív egész számra

$$\frac{1}{\sqrt{y-\sqrt{y^2-1}}} - \frac{1}{\sqrt{y+\sqrt{y^2-1}}} = x$$

teljesül. Mi lehet az y szám utolsó számjegye?

Megoldás. Az adott egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve

$$\frac{1}{y-\sqrt{y^2-1}}-\frac{2}{\sqrt{\left(y-\sqrt{y^2-1}\,\right)\left(y+\sqrt{y^2-1}\,\right)}}+\frac{1}{y-\sqrt{y^2-1}}=x^2$$

adódik. 1 pont

$$\frac{1}{y-\sqrt{y^2-1}}=y+\sqrt{y^2-1} \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}=y-\sqrt{y^2-1}$$

a nevezők gyöktelenítése alapján. 1 pont

Mivel $\left(y-\sqrt{y^2-1}\,\right)\left(y+\sqrt{y^2-1}\,\right)=1$, 1 pont

ezért a négyzetreemeléssel kapott egyenlet alakja

$$y+\sqrt{y^2-1}-2+y-\sqrt{y^2-1}=x^2, \qquad \text{azaz} \qquad 2y-2=x^2.$$

Így pedig $y=\dfrac{x^2+2}{2}$. 1 pont

Formulánk alapján x csak páros szám lehet, azaz $x=2k$ alakú, ahol $k\in\mathbb{Z}^+$.

Ekkor $y=2k^2+1$. 1 pont

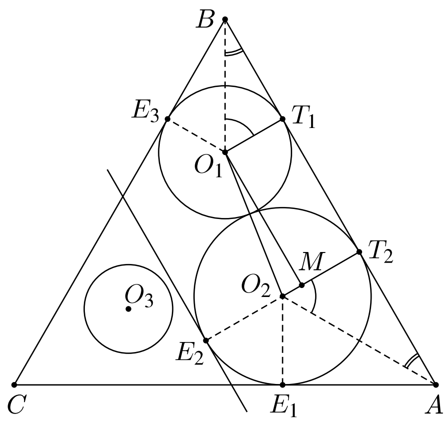
Ha pedig $y=2k^2+1$ alakú, akkor az y szám utolsó számjegye k 10-es maradékai alapján rendre ($k=0,1,2,\dots,9$) 1, 3, 9, 9, 3, 1, 3, 9, 9, 3. 1 pont

Tehát az y szám utolsó számjegye 1 vagy 3 vagy 9. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Mekkora annak a legkisebb szabályos háromszögnek az oldala, amelybe egy 2, egy 3 és egy 4 sugarú kör mindegyike átfedés nélkül beírható?

Megoldás.



Helyezzük be az O_1 és O_2 középpontú 3, illetve 4 sugarú köröket egy szabályos háromszög két csúcsához úgy, hogy egymást és a háromszög szárait is érintsék a T_1, E_3 és T_2, E_1 pontokban.

Kössük össze az O_1 középpontot a B, az O_2 középpontot az A csúccsal az ábra szerint. Az O_1B és az O_2A szakaszok felezik a szabályos háromszög belső szögét. Így $O_1BT_1\sphericalangle=O_2AT_2\sphericalangle=30°$. O_1T_1 sugár és O_2T_2 sugár merőleges a háromszög AB oldalára.

Az O_1BT_1 és az O_2AT_2 háromszögek belső szögei tehát 90°-60°-30°-osak. 1 pont

A nevezetes háromszög oldalai közti összefüggést ismerve, mivel $O_1T_1=3$ és $O_2T_2=4$, így $BT_1=3\sqrt{3}$ és $AT_2=4\sqrt{3}$. 1 pont

A körök O_1 és O_2 középpontjait összekötve az O_1O_2 átmegy a körök érintési pontján, így $O_1O_2 = 3 + 4 = 7$.

Állítsunk merőlegest O_2T_2-re O_1-ből. Mivel $O_1T_1 = 3$, $O_2T_2 = 4$ így $O_2M = 1$.

Írjuk fel az O_1O_2M derékszögű háromszögre a Pitagorasz-tételt:

$$\begin{aligned} O_1O_2^2 &= O_1M^2 + O_2M^2, \\ 7^2 &= O_1M^2 + 1^2, \\ 48 &= O_1M^2, \\ O_1M &= \sqrt{48} = 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$ 1 pont

Mivel $O_1MT_1T_2$ téglalap, ezért $O_1M = T_1T_2 = 4\sqrt{3}$. 1 pont

Tehát az ABC szabályos háromszög oldala

$$BT_1 + T_1T_2 + T_2A = 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 11\sqrt{3}.$$ 1 pont

Megmutatjuk, hogy ez a háromszög megfelelő, és beírható a hiányzó 2 sugarú kör fedés nélkül.

Hosszabbítsuk meg O_2T_2-t, a körrel vett metszéspontja legyen E_2. Húzzunk E_2-n keresztül párhuzamost az AB oldallal. Az így keletkezett szabályos háromszög magassága az ABC háromszög $11\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ magasságánál az $E_2T_2 = 8$ szakasszal kisebb, azaz $\frac{17}{2}$. (Mivel a szabályos háromszög magassága az oldal $\frac{\sqrt{3}}{2}$-szerese, ezért a kis háromszög oldala $\frac{17}{\sqrt{3}}$.) 1 pont

A szabályos háromszögbe írható kör sugara a magasság harmada, mivel az egyben a szögfelező és súlyvonal is. Így ebbe a kisháromszögbe írható kör sugara

$$\frac{17}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{17}{6} = 2{,}8\dot{3}.$$

Ez nagyobb, mint 2, így a 2 sugarú kör beírható ebbe a háromszögbe. 1 pont

Tehát $11\sqrt{3}$ oldalú az a szabályos háromszög, amibe egy 2, egy 3 és egy 4 sugarú kör fedés nélkül beírható.

Összesen: 7 pont