

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2004/2005-ös tanév
első (iskolai) forduló
haladók – II. kategória
(nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók)

Feladatok

1. Határozza meg az összes olyan x egész számot, amelyre $x^2 + 19x + 95$ négyzetszám!
2. Egy 12 egységnyi alapú egyenlő szárú háromszögbe félkört írunk úgy, hogy a félkör átmérője a háromszög alapján van, a félkör íve pedig érinti a háromszög oldalait. Mekkora a félkör sugara, ha a félkörív az alaphoz tartozó magasságot a csúcshoz közelebbi harmadolópontban metszi?
3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszög körülírt és beírt körének középpontját összekötő egyenes az átfogóval 45° -os szöget zár be, akkor a háromszög egyik szöge 30° -os.
4. Bizonyítsuk be, hogy
 - a) $2^{2004} + 2$ nem lehet két négyzetszám összege,
 - b) $2^{2005} + 2$ pedig felbontható két négyzetszám összegére.
5. Négy valós számból páronként kéttagú összegeket képzünk. A hat összeg közül négy darab racionális, kettő irracionális. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az eredeti négy szám összege racionális.