Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2009/2010-es tanév
kezdők I–II. kategória II. forduló
kezdők III. kategória I. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Bizonyítsa be, hogy az $1, 2, \ldots, 2010$ számok közül kiválasztható 1005 úgy, hogy a kiválasztottak szorzata négyzetszám legyen. (6 pont)

Megoldás. Pl. válasszuk ki először a következő 502 db számot: $502, 503, \ldots, 1003$, majd válasszuk még ki mindegyiknek a kétszeresét! 4 pont

Ez így összesen 1004 darab szám, és a szorzatuk $2^{502} \cdot 502^2 \cdot 503^2 \cdot \ldots \cdot 1003^2$, ami négyzetszám. Vegyük még hozzá az 1-et, és készen vagyunk. 2 pont

2. Hány olyan négyjegyű természetes szám van, amelynek számjegyei között van prímszám és négyzetszám is? (6 pont)

Megoldás.

$H :=$ {négyjegyű számok},
$A :=$ {olyan négyjegyű számok, amelyek egyik számjegye sem prímszám} és
$B :=$ {olyan négyjegyű számok, amelyeknek egyik számjegye sem négyzetszám}.

$|H| = 9 \cdot 10^3$; $|A| = 5 \cdot 6^3$, mivel a lehetséges számjegyek: 0, 1, 4, 6, 8, 9 és az első számjegy nem 0; (1 pont)

$|B| = 6^4$, mivel a lehetséges számjegyek: 2, 3, 5, 6, 7 és 8; (1 pont)

$|A \cap B| = 2^4$, mivel a lehetséges számjegyek: 6 és 8. (1 pont)

Így a logikai szita formula alapján: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 2360$. (2 pont)

Tehát $|H| - |A \cup B| = 6640$ megadott tulajdonságú négyjegyű szám van. (1 pont)

Azért az ötletért, hogy egyszerűbb a nem megfelelő számok számát meghatározni 2 pont adható.

3. Zoli elfelejtette barátja hétjegyű telefonszámát. Bizonyos dolgokra mégis emlékszik: Nem volt benne 0, volt benne legalább két darab 2-es és legalább két darab 3-as, valamint a számjegyek összege éppen 20 volt. Ha mindenképpen fel szeretné hívni barátját, akkor legrosszabb esetben hány telefonszámot kell végig próbálnia? (8 pont)

Megoldás. A biztos számok összege 10, ezért a hiányzó három szám összege is 10.

Számjegy	$1,1,8$	$1,2,7$	$1,3,6$	$1,4,5$	$2,2,6$	$2,3,5$	$2,4,4$	$3,3,4$
Lehetőségek száma	$\frac{7!}{2!2!2!}$	$\frac{7!}{3!2!}$	$\frac{7!}{2!3!}$	$\frac{7!}{2!2!}$	$\frac{7!}{4!2!}$	$\frac{7!}{3!3!}$	$\frac{7!}{3!2!2!}$	$\frac{7!}{2!4!}$
Eredmény	630	420	420	1260	105	140	210	105

Összesen 3290 számot kell felhívni.

Pontozás:
2 hiányzó számjegyhármas helyes megadása, jó esetszámmal: 2 pont
4 hiányzó számjegyhármas helyes megadása, jó esetszámmal: 3 pont
6 hiányzó számjegyhármas helyes megadása, jó esetszámmal: 5 pont
7 hiányzó számjegyhármas helyes megadása, jó esetszámmal: 6 pont
8 hiányzó számjegyhármas helyes megadása, jó esetszámmal: 7 pont
Helyes válasz: 1 pont

Ha csak a hiányzó lehetséges telefonszámjegyeket adja meg (a táblázat első sora), akkor legfeljebb 2 pont adható.

4. Mennyi a $\sqrt{x^2+(y-1608)^2}+\sqrt{y^2+(x-1206)^2}$ kifejezés legkisebb értéke, ha x és y valós számok? (10 pont)

1. megoldás. Vegyük fel a derékszögű koordinátarendszerben az $A(0;1608)$, $B(1206;0)$ és $C(x;y)$ pontokat. Ekkor: 3 pont

$$AC=\sqrt{x^2+(y-1608)^2} \quad \text{és} \quad BC=\sqrt{(x-1206)^2+y^2}.$$ 2 pont

Tehát a háromszög egyenlőtlenség alapján:

$$AC+BC \geqq AB=\sqrt{1206^2+1608^2}=2010.$$ 3 pont

Pl. ha $x=0$ és $y=1608$, akkor az egyenlőség áll fenn.

Tehát a kifejezés legkisebb értéke 2010. 2 pont

2. megoldás. Először igazoljuk, hogy bármely a, b, c és d valós számra igaz, hogy:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \geqq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}.$$

Mivel mindkét oldal nem negatív, ez ekvivalens azzal, hogy mindkét oldalt négyzetre emeljük. Tehát:

$$a^2+b^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}+c^2+d^2 \geqq (a+c)^2+(b+d)^2.$$

Ebből rendezéssel a következő egyenlőtlenséghez jutunk:

$$\sqrt{a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2} \geqq ac+bd.$$

Ha itt a jobb oldal negatív, akkor az egyenlőtlenség teljesül, hiszen a baloldal nem negatív. Ha pedig a jobb oldal nem negatív, akkor mindkét oldal nem negatív és ekkor ekvivalens azzal, hogy mindkét oldalt négyzetre emeljük. Tehát:

$$a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \geqq a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2,$$

amiből az

$$(ad - bc)^2 \geqq 0$$

nyilvánvaló egyenlőtlenséget kapjuk. 6 pont

Legyen $a = x$, $b = 1608 - y$, $c = 1206 - x$ és $d = y$. Ekkor azt kapjuk, hogy:

$$\sqrt{x^2 + (y - 1608)^2} + \sqrt{y^2 + (x - 1206)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 + (1608 - y)^2} + \sqrt{(1206 - x)^2 + y^2} \geqq \sqrt{1206^2 + 1608^2} = 2010.$$ 2 pont

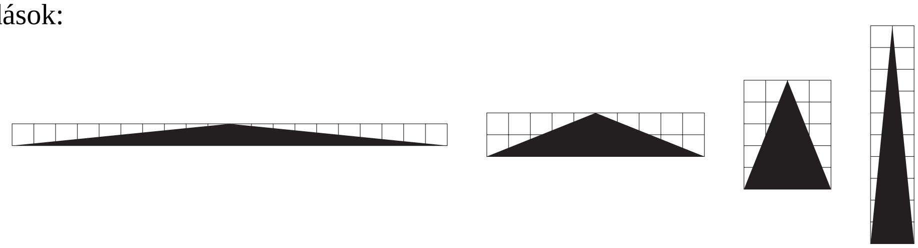
Pl. ha $x = 0$ és $y = 1608$, akkor az egyenlőség áll.

Tehát a kifejezés legkisebb értéke 2010. 2 pont

5. Hány különböző 10 egységnégyzet területű, egyenlőszárú háromszöget rajzolhatunk a négyzetrácsra úgy, hogy a háromszög egyik oldala rácsvonalra, csúcsai pedig rácspontokra illeszkedjenek? (Két háromszöget akkor tekintünk különbözőnek, ha nem egybevágóak.) (10 pont)

Megoldás. A háromszög rácsvonalra illeszkedő oldalának és a háromszög ezen oldalához tartozó magasságának szorzata 20, és mindkettő pozitív egész szám, tehát a $20 \cdot 1$, $10 \cdot 2$, $5 \cdot 4$, $4 \cdot 5$, $2 \cdot 10$ és $1 \cdot 20$ felbontások jönnek szóba. 2 pont

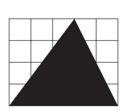
Ha az egyenlőszárú háromszög a hosszúságú alapja illeszkedik rácsvonalra, akkor az alap csak páros hosszúságú lehet, mert az alappal szemközti csúcs csak így lehet rácspont, mivel az alappal szemközti csúcs vetülete $a/2$ távolságra van az alap végpontjaitól. A lehetséges megoldások:



2 pont

Ha az egyenlőszárú háromszög egyik b hosszúságú szára illeszkedik rácsvonalra, akkor ezzel a szárral szemközti csúcs csak akkor lehet rácspont, ha erre a szárra eső vetülete egész számnyi távolságra van a szár végpontjaitól, azaz $\sqrt{b^2 - m_b^2}$ egész szám (ahol m_b a szárhoz tartozó magasság hossza). 4 pont

Egyszerű számolással látható, hogy ez csak az $5 \cdot 4$-es felbontásnál teljesül.



Tehát 5 különböző egyenlőszárú háromszög elégíti ki a megadott feltételeket. 2 pont