**Bolyai János**

**Matematikai Társulat**

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

# Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
# 2009/2010-es tanév
# I. forduló
# kezdők I–II. kategória

## Megoldások és javítási útmutató

**1.** Hány (pozitív) osztója van a

$$(-1)^0 \cdot 1 + (-1)^1 \cdot 2 + (-1)^2 \cdot 3 + (-1)^3 \cdot 4 + \ldots + (-1)^{2007} \cdot 2008 + (-1)^{2008} \cdot 2009$$

összegnek? (6 pont)

**Megoldás.** Az összeg a hatványozás és csoportosítás után:

$$(1-2) + (3-4) + \ldots + (2007-2008) + 2009 = \qquad \text{2 pont}$$

$$= -1004 + 2009 = 1005 = 3 \cdot 5 \cdot 67. \qquad \text{2 pont}$$

Az osztók: 1, 3, 5, 15, 67, 201, 335, 1005. Tehát az összegnek 8 osztója van. 2 pont

*Megjegyzés:* Természetesen az, hogy 8 osztó van abból is következik, hogy a szám három különböző prímszám első hatványainak szorzata, tehát az osztók száma:

$$(1+1)(1+1)(1+1) = 8.$$

**2.** Igaz-e, hogy $2009 + 2^{2010}$ prímszám? (6 pont)

**Megoldás.** Nézzük meg, hogy adott szám 3-mal osztva mennyi maradékot ad! 3 pont

2009 3-mal osztva 2 maradékot ad.

2 páratlan kitevős hatványai 3-mal osztva 2 maradékot, a páros kitevős hatványai pedig 1 maradékot adnak 2 pont

Így az adott szám 3-nál nagyobb 3-mal osztható szám, tehát nem prímszám. 1 pont

**3.** Hány olyan háromjegyű szám van – a tízes számrendszerben –, amelynek a négyzete 2009-re végződik? (6 pont)

**Megoldás.** Legyen a keresett szám: $x = 100\,a + 10\,b + c$.

Egy szám négyzete pontosan akkor végződik 9-re, ha a szám utolsó számjegye 3 vagy 7. 1 pont

Ha $c = 3$, akkor $x = 100\,a + 10\,b + 3$, és így

$$x^2 = 10\,000\,a^2 + 100\,b^2 + 9 + 2000\,ab + 600\,a + 60\,b.$$

Ennek utolsó előtti számjegye megegyezik $60\,b$ utolsó előtti számjegyével, hiszen a többi tag 00-ra végződik. Világos, hogy $60\,b$ utolsó előtti számjegye azonos $6\,b$ utolsó számjegyével, amely csak $b=0$ és $b=5$ esetén lesz 0. 1 pont

$b=5$ esetén $x^2 = 10\,000\,a^2 + 2500 + 9 + 10\,000\,a + 600\,a + 300$.

Ennek utolsó négy számjegye megegyezik $2809 + 600\,a$ utolsó négy számjegyével, ami 3409 és 8209 között van és ezért nem lehet 2009.

Ha $b=0$, akkor $x^2 = 10\,000\,a^2 + 600\,a + 9$.

Ennek utolsó négy számjegye megegyezik $600\,a+9$ utolsó négy számjegyével, ami 0609 és 5409 között van és ezért csak akkor lehetne 2009, ha $600\,a+9=2009$, amiből az $a$-ra nem számjegyet kapunk. 1 pont

Ha $c=7$, akkor $x^2 = 10\,000\,a^2 + 100\,b^2 + 49 + 2000\,ab + 1400\,a + 140\,b$.

Ennek utolsó előtti számjegye megegyezik $49+140\,b$ utolsó előtti szám jegyével, amely csak akkor lesz 0, ha $b=4$ vagy $b=9$. 1 pont

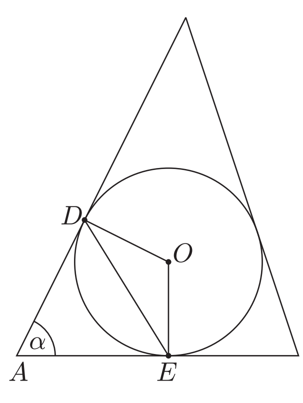
A $b=4$ esetben $x^2 = 10\,000\,a^2 + 9400\,a + 2209$, és ez csak akkor végződik 009-re, ha $a=2$ vagy $a=7$. Azonban $247^2 = 61\,009$ és $747^2 = 558\,009$ egyike sem végződik 2009-re. 1 pont

A $b=9$ esetben pedig $x^2 = 10\,000\,a^2 + 19\,400\,a + 9409$, és ez csak akkor végződik 009-re, ha $a=4$ vagy $a=9$. Azonban $497^2 = 247\,009$ és $997^2 = 994\,009$ egyike sem végződik 2009-re. 1 pont

Tehát nincs olyan háromjegyű szám, amelyeknek négyzete 2009-re végződik.

**4.** Az $ABC$ háromszögbe beírható kör a $BC$ oldalt $A_1$-ben, az $AC$ oldalt $B_1$-ben és az $AB$ oldalt $C_1$-ben érinti. Ugyanígy kapjuk az $A_1B_1C_1$ háromszögből az $A_2B_2C_2$ háromszöget is. Mekkorák az $ABC$ háromszög szögei, ha szögei ugyanakkorák, mint az $A_2B_2C_2$ megfelelő szögei ($A$-nál lévő szög megegyezik az $A_2$-nél lévő szöggel, a $B$-nél lévő szög megegyezik a $B_2$-nél lévő szöggel)? (6 pont)

**Megoldás.**




Legyen a háromszögbe beírható kör középpontja $O$ és érintse ezt a kört az $A$-ból induló két oldal az $E$ és $D$ pontokban, továbbá legyen az $A$ csúcsnál lévő szög $\alpha$!

Az $AEOD$ négyszögben az $E$-nél és a $D$-nél is derékszög van, ezért az $O$-nál lévő szöge $180^\circ - \alpha$. A $DEO$ háromszög $DO$ és $EO$ oldala is a kör sugara. Tehát:

$$ODE\sphericalangle = DEO\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}\,.$$ 3 pont

Ugyanez igaz a többi csúcsra is. Így az $A_1B_1C_1$ háromszög szögei:

$$\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}\,, \quad 90^\circ - \frac{\beta}{2}\,, \quad 90^\circ - \frac{\gamma}{2}\,.$$ 1 pont

Ez alkalmazható az $A_1B_1C_1$ háromszögre is. Tehát az $A_2B_2C_2$ háromszög szögei:

$$90^\circ - \frac{\left(90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)}{2} = 45^\circ + \frac{\alpha}{4}\,, \quad 45^\circ + \frac{\beta}{4}\,, \quad 45^\circ + \frac{\gamma}{4}\,.$$ 1 pont

Ezek megegyeznek az $ABC$ háromszög szögeivel tehát:

$$45^\circ + \frac{\alpha}{4} = \alpha, \quad 45^\circ + \frac{\beta}{4} = \beta, \quad 45^\circ + \frac{\gamma}{4} = \gamma.$$

Így az $ABC$ háromszög mindhárom szöge $60^\circ$-os. 1 pont